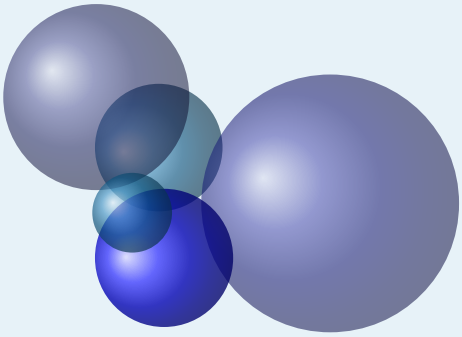
AlterMundus

tkz-fn 1.02c



Alain Matthes

26 novembre 2026 Documentation V.1.02c

http://altermundus.fr

tkz-fn

AlterMundus

Alain Matthes

tkz-fn.sty (v1.02c) est un package pour créer, à l'aide de Ti*k*Z et de Lua, des représentations graphiques de fonctions en 2D le plus simplement possible. Il succède à `tkz-fct` : `gnuplot`, `fp.sty` et `tkz-base` ne sont plus nécessaires, tous les calculs sont faits par Lua et le document se compile avec `LuaLaTeX`. Ce sont des représentations du type scolaire qui correspondent à l'enseignement proposé dans les lycées français.

☞ Je souhaite remercier `Till Tantau` pour avoir créé le merveilleux outil **TikZ**, ainsi que `Michel Bovani` pour `fourier`.

☞ Je souhaite remercier aussi `David Arnold`, `Pablo González Luengo`, `Wolfgang Büchel`, `John Kitzmiller` et `Gaétan Marris` pour leur aide sur `tkz-fct` ; les exemples de cette documentation en sont issus.

☞ Vous trouverez de nombreux exemples sur mon site : altermundus.fr

Vous pouvez envoyer vos remarques, et les rapports sur des erreurs que vous aurez constatées à l'adresse suivante : Alain Matthes.

This work may be distributed and/or modified under the conditions of the LaTeX Project Public License, either version 1.3 of this license or (at your option) any later version.

Table des matières

1 Présentation 6
1.1 Pourquoi un nouveau package? . . . 6
1.2 Deux espaces de coordonnées . . . 6

2 Installation et compilation 7
2.1 Les fichiers . . . 7
2.2 Chargement . . . 7
2.3 Compilation . . . 7
2.4 Écriture des fonctions . . . 7

3 Le repère 8
3.1 Initialisation : **\tkzFnInit** . . . 8
3.2 Grille : **\tkzFnGrid** . . . 8
3.3 Axes : **\tkzFnAxes**, **\tkzFnAxisX**, **\tkzFnAxisY** . . . 9
3.4 Découpage : **\tkzFnClip** . . . 9
3.5 Vecteurs du repère : **\tkzFnRep** . . . 9
3.6 Texte : **\tkzFnText** . . . 10
3.7 Flèches aux deux extrémités : **arrows** . . . 10
3.8 Présentation « boîte » : **box** . . . 12

4 Tracer une fonction 15
4.1 Définir une fonction : **\tkzFnDef** . . . 15
4.2 Tracer une fonction : **\tkzFnDraw** . . . 15
4.3 Option : **samples** . . . 15
4.4 Options : **xstep, ystep** . . . 16
4.5 Modification de **xstep** et **ystep** . . . 16
4.6 **ystep** et les fonctions constantes . . . 17
4.7 Les fonctions affines ou linéaires . . . 18
4.8 Sous-grille . . . 18
4.9 Textes et points . . . 19

5 Points 20
5.1 Placer un point sur une courbe : **\tkzFnDefPoint** . . . 20
5.2 Exemple . . . 21
5.3 Option **draw** . . . 21
5.4 Placer des points sans courbe : **\tkzFnMarkPoints** . . . 22
5.5 Placer des points sans se soucier des coordonnées . . . 23
5.6 Placer des points avec deux fonctions . . . 24
5.7 Coordonnées d'un point : **\tkzFnShowCoord** et **\tkzFnPrintCoord** . . . 24

6 Nommer les courbes 26
6.1 Ajouter un label . . . 26

7 Tangentes 27
7.1 Représentation d'une tangente : **\tkzFnTangent** . . . 27
7.2 Tangente avec **xstep** et **ystep** différents de 1 . . . 27
7.3 Les options **kl**, **kr** et l'option **draw** . . . 28
7.4 Tangente et deux fonctions . . . 28
7.5 Quelques tangentes . . . 30
7.6 Demi-tangentes . . . 30
7.7 Demi-tangentes : courbe de Lorentz . . . 31
7.8 Série de tangentes . . . 32

7.9 Série de tangentes sans courbe . . . 33
7.10 Abscisse donnée par une expression . . . 35

8 Zéros et extremums 36
8.1 Définir les zéros : \tkzFnZeros . . . 36
8.2 Tangentes aux zéros et aux extremums . . . 37
8.3 Fonction discontinue . . . 37
8.4 Limites . . . 38

9 Surfaces 39
9.1 Représentation d'une surface : \tkzFnArea . . . 39
9.2 Naissance de la fonction logarithme népérien . . . 39
9.3 Surface simple . . . 40
9.4 Surface et hachures . . . 42
9.5 Surface comprise entre deux courbes en couleur . . . 43
9.6 Surface comprise entre deux courbes avec des hachures . . . 43
9.7 Surface comprise entre deux courbes : option where . . . 44
9.8 Surface comprise entre deux courbes : courbes de Lorentz . . . 45
9.9 Mélange de styles . . . 46
9.10 Courbes de niveaux . . . 47

10 Sommes de Riemann 48
10.1 Somme de Riemann . . . 48
10.2 Méthodes inf et sup . . . 49
10.3 Méthode mid . . . 50
10.4 Valeurs des sommes . . . 50

11 Droites particulières 51
11.1 Droites verticales : \tkzFnVLines . . . 51
11.2 Ligne verticale . . . 51
11.3 Lignes verticales . . . 51
11.4 Lignes verticales et multiples de pi . . . 52
11.5 Droites horizontales : \tkzFnHLines . . . 52
11.6 Asymptote horizontale . . . 52
11.7 Lignes horizontales . . . 54
11.8 Asymptotes horizontale et verticale . . . 55

12 Courbes paramétrées 56
12.1 Courbe paramétrée exemple 1 . . . 56
12.2 Courbe paramétrée exemple 2 . . . 57
12.3 Courbe paramétrée exemple 3 . . . 58
12.4 Courbe paramétrée exemple 4 . . . 59
12.5 Courbe paramétrée exemple 5 . . . 60
12.6 Courbe paramétrée exemple 6 . . . 61
12.7 Courbe paramétrée exemple 7 . . . 62

13 Courbes en coordonnées polaires 63
13.1 Équation polaire exemple 1 . . . 63
13.2 Équation polaire exemple 2 . . . 63
13.3 Équation polaire : cœur . . . 65
13.4 Équation polaire exemple 4 . . . 65
13.5 Équation polaire : Cannabis curve . . . 66
13.6 Scarabaeus curve . . . 67

14 Courbes définies implicitement 68
14.1 Coniques . . . 68
14.2 Lemniscate de Bernoulli et folium de Descartes . . . 68
14.3 Une courbe elliptique . . . 69
14.4 Courbes de niveau . . . 70
14.5 Fonction discontinue . . . 70
14.6 Fenêtre, unités et lissage . . . 71
14.7 Limites de la méthode . . . 71

15 Symboles 72

16 Présentation des résultats : forme française ou américaine 73
16.1 Choix de la forme . . . 73
16.2 Écrire un résultat : \tkzFnPrint . . . 73
16.3 Exemple . . . 74
16.4 Graduations en forme américaine . . . 74

17 Avec tkz-elements 75
17.1 En Lua . . . 75

18 Quelques exemples 76
18.1 TikZ et tkz-fn . . . 76
18.2 Courbes de Lorentz . . . 77
18.3 Courbe exponentielle . . . 78
18.4 Axe logarithmique . . . 78
18.5 Un peu de tout . . . 80
18.6 Interpolation . . . 81
18.6.1 Le code . . . 81
18.6.2 La figure . . . 81
18.7 Courbes de Van der Waals . . . 83
18.7.1 Tableau de variations . . . 83
18.7.2 Première courbe avec b=1 . . . 84
18.7.3 Deuxième courbe b=1/3 . . . 85
18.7.4 Troisième courbe b=32/27 . . . 86
18.8 Valeurs critiques . . . 87
18.8.1 Courbes de Van der Waals . . . 87
18.8.2 Courbes de Van der Waals (suite) . . . 88

19 Exemples avec les packages alterqcm et tkz-tab 89
19.0.1 Première représentation . . . 90
19.0.2 Seconde représentation . . . 91

20 De tkz-fct à tkz-fn 92
20.1 Correspondance des macros . . . 92
20.2 Ce qui change . . . 92

21 Liste des macros 93
21.1 Styles . . . 93

Index 94

1 Présentation

1.1 Pourquoi un nouveau package ?

tkz-fct confiait le calcul des points des courbes à **gnuplot** et le calcul des images et des pentes à **fp.sty**. Il fallait donc installer **gnuplot**, autoriser **shell-escape**, écrire chaque fonction dans deux syntaxes et souvent mettre les polynômes sous la forme de `Horner` pour éviter les dépassements de capacité de **fp**.

tkz-fn remplace tout cela par **Lua**, présent dans **LuaLaTeX** :

— les points des courbes, les images, les dérivées, les aires sont calculés par Lua en double précision ;
— une fonction est définie une seule fois, avec la syntaxe de Lua (`x^2`, `sin(x)`, `exp(x)`) ;
— ni **gnuplot**, ni **shell-escape**, ni fichier auxiliaire ;
— **tkz-fn** ne dépend que de Ti*k*Z ; il n'utilise ni **tkz-base**, ni **tkz-euclide** ;
— les résultats numériques sont présentés sous la forme française ou sous la forme américaine ;
— un pont permet d'utiliser les points définis par **tkz-fn** avec **tkz-elements**.

Toutes les macros commencent par **\tkzFn**, ce qui évite tout conflit avec **tkz-fct**, **tkz-base** ou **tkz-euclide**.

1.2 Deux espaces de coordonnées

Un repère est défini par **\tkzFnInit**, avec les options **xmin**, **xmax**, **xstep**, **ymin**, **ymax** et **ystep**. **xstep** est la valeur représentée par un centimètre sur l'axe des abscisses, **ystep** celle représentée par un centimètre sur l'axe des ordonnées.

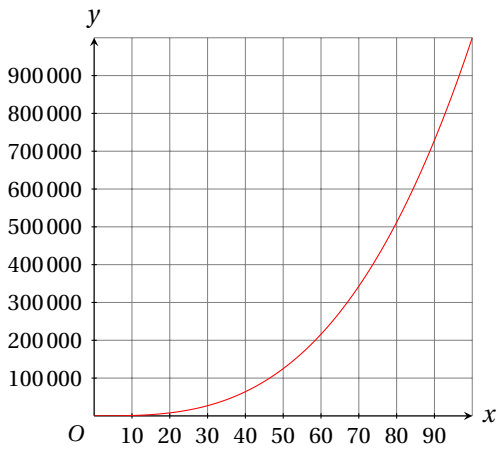
— Tous les calculs se font dans les unités du repère : $f(x)$, la pente d'une tangente, une aire, une somme de Riemann, les coordonnées d'un point.
— Le tracé se fait en centimètres. La conversion est faite au dernier moment :

$$X = \frac{x}{\text{xstep}} \qquad Y = \frac{y}{\text{ystep}}$$

Il n'y a donc plus besoin d'écrire `\x` à la place de `x` lorsque **xstep** est différent de 1. Par exemple, soit à tracer le graphe de la fonction f définie par :

$$0 \leq x \leq 100 \text{ et } f(x) = x^3$$

Les valeurs de $f(x)$ sont comprises entre 0 et 1 000 000. En choisissant **xstep=10** et **ystep=100000**, les axes ont environ 10 cm de longueur (sans mise à l'échelle).




```
\begin{tikzpicture}[scale=.5]
  \tkzFnInit[xmax=100,xstep=10,
             ymin=0,ymax=1000000,
             ystep=100000,xmin=0]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes[decimals=0]
  \tkzFnDraw[color=red,
             domain=0:100]{x^3}
\end{tikzpicture}
```

2 Installation et compilation

2.1 Les fichiers

Le package est formé de deux fichiers :
- **tkz-fn.sty** : l'interface LaTeX (les macros et leurs options) ;
- **tkz_fn.lua** : le code Lua (les calculs et le code Ti*k*Z produit).

Les deux fichiers doivent être placés dans un dossier connu de TeX, par exemple **texmf/tex/latex/tkz-fn**, ou bien dans le dossier du document.

2.2 Chargement

```
\usepackage{tkz-fn}          % format selon la langue de babel
\usepackage[fr]{tkz-fn}      % résultats sous la forme française
\usepackage[us]{tkz-fn}      % résultats sous la forme américaine
```

Ti*k*Z est chargé automatiquement. Certaines options de Ti*k*Z utilisées dans les exemples demandent des bibliothèques : `\usetikzlibrary{arrows,patterns}`.

2.3 Compilation

Le document doit être compilé avec **LuaLaTeX**. L'option **shell-escape** n'est pas nécessaire et aucun fichier auxiliaire n'est créé.

2.4 Écriture des fonctions

Les expressions sont des expressions Lua. La variable est `x` pour une fonction, `t` pour une courbe paramétrée ou polaire.

Lua	ancienne syntaxe (gnuplot)	description
`x^3`, `x^0.5`	`x**3`, `x**0.5`	puissance
`1/3`	`1./3`	quotient (toujours décimal)
`ln(x)` ou `log(x)`	`log(x)`	logarithme népérien
`log10(x)`	`log10(x)`	logarithme décimal
`exp(x)`, `e`	`exp(x)`, `exp(1)`	exponentielle, nombre e
`sqrt(x)`, `abs(x)`	`sqrt(x)`, `abs(x)`	racine carrée, valeur absolue
`sin`, `cos`, `tan`	idem	radians
`asin`, `acos`, `atan`	idem	fonctions réciproques
`sinh`, `cosh`, `tanh`	idem	fonctions hyperboliques
`pi`	`pi`	π
`floor`, `ceil`, `sign`, `mod(a,b)`	`floor`, `ceil`, `sgn`, `%`	
`cbrt(x)`, `root(x,n)`		racine cubique, racine n-ième

☞ Une fonction définie par **\tkzFnDef** peut être utilisée dans une autre expression : `2*f(x)+1`. Une variable globale de Lua peut servir de paramètre : `\directlua{a = 0.5}` puis `a*x^2`.

☞ Les fonctions `diff(f,x)`, `integral(f,a,b)` et `riemann(f,a,b,n,"left")` donnent la dérivée en un point, l'intégrale (méthode de Simpson) et une somme de Riemann. On les utilise avec **\tkzFnPrint**.

Un argument placé entre parenthèses ne doit pas contenir de parenthèse fermante non protégée : on écrit `(f,{1/exp(1)})` et non `(f,1/exp(1))`.

3 Le repère

Ces macros remplacent celles de **tkz-base** (\tkzInit, \tkzGrid, \tkzAxeXY, \tkzDrawX, \tkzClip, \tkzRep, \tkzText).

3.1 Initialisation : \tkzFnInit

\tkzFnInit[⟨options⟩]

options	défaut	définition
xmin	-5	plus petite abscisse
xmax	5	plus grande abscisse
xstep	1	valeur représentée par 1 cm sur l'axe des abscisses
ymin	-5	plus petite ordonnée
ymax	5	plus grande ordonnée
ystep	1	valeur représentée par 1 cm sur l'axe des ordonnées
xorigin	0	abscisse placée en $X = 0$ (par exemple une année)
yorigin	0	ordonnée placée en $Y = 0$
enlarge	0 (0.1 sans valeur)	élargit la fenêtre d'une fraction de sa taille
enlarge x, enlarge y	enlarge	élargissement dans une seule direction

*Les valeurs peuvent être des expressions : xmax=2*pi.*

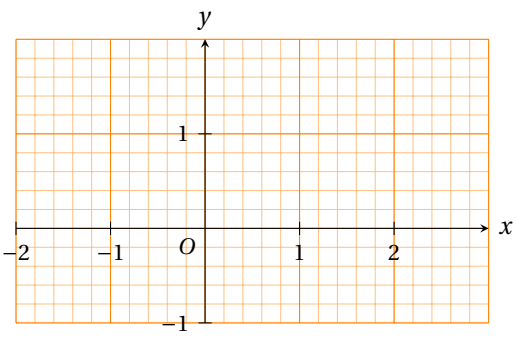
3.2 Grille : \tkzFnGrid

\tkzFnGrid[⟨options⟩](⟨x_1,y_1⟩)(⟨x_2,y_2⟩)

La région est facultative ; par défaut la grille couvre la fenêtre.

options	défaut	définition
dx	xstep	écart entre deux lignes verticales
dy	ystep	écart entre deux lignes horizontales
sub	false	ajoute une sous-grille
subdx	dx/5	écart de la sous-grille
subdy	dy/5	écart de la sous-grille

Les autres options sont celles de TikZ ; le style est **tkzfn grid**.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
 \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=3,
            ymin=-1,ymax=2]
 \tkzFnGrid[sub,color=orange]
 \tkzFnAxes
\end{tikzpicture}
```

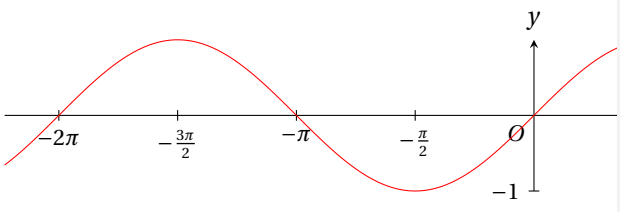
3.3 Axes : \tkzFnAxes, \tkzFnAxisX, \tkzFnAxisY

\tkzFnAxes[⟨options⟩]

Trace les deux axes, les graduations et leurs valeurs. Les axes se coupent en (0 ; 0) *si ce point est dans la fenêtre, sinon en* $(x_{\min}\,;\,y_{\min})$. *Les valeurs sont écrites sous la forme française ou américaine (section 16).*

options	défaut	définition
dx, dy	xstep, ystep	écart entre deux graduations
xlabel, ylabel	x, y	noms des axes
ticks	true	graduations
labels	true	valeurs des graduations
line	true	tracé des axes
origin	O ou 0	nom de l'origine (O en français, 0 en américain)
trig	0	si $n>0$, graduations de l'axe des abscisses en multiples de π/n
decimals	4	nombre maximum de décimales
box	false	présentation « boîte » (section 3.8)
style	school	school ou box
tick length	3pt	longueur des graduations (boîte)
arrows	end	flèches : end, both (aux deux extrémités) ou none

\tkzFnAxisX et \tkzFnAxisY tracent un seul axe ; leurs options sont les mêmes avec **label**, **label style** *et* **step** *à la place de* **xlabel**, **ylabel** *et* **dx**. *Avec* **ticks=false**, *on obtient l'équivalent de* **\tkzDrawX**.




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=-7,xmax=7,
             ymin=-1,ymax=1]
  \tkzFnAxisY
  \tkzFnAxisX[trig=2]
  \tkzFnDraw[red]{sin(x)}
\end{tikzpicture}
```

3.4 Découpage : \tkzFnClip

\tkzFnClip[⟨marge en pt⟩]

Restreint la suite du dessin à la fenêtre du repère (agrandie d'une marge). Comme **\clip**, *on l'utilise de préférence dans un environnement* **scope**. *Les courbes et les tangentes sont de toute façon découpées à la fenêtre (option* **clip**).

3.5 Vecteurs du repère : \tkzFnRep

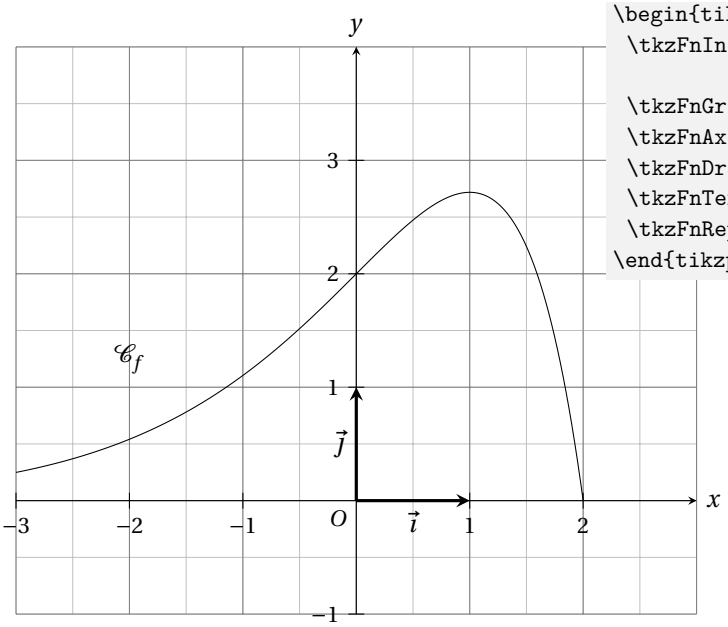
\tkzFnRep[⟨options de TikZ⟩]

Trace les vecteurs $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *; le style est* **tkzfn rep**.

3.6 Texte : \tkzFnText

\tkzFnText[⟨options de TikZ⟩](⟨x,y⟩){⟨texte⟩}

Place un texte au point de coordonnées (x ; y) dans le repère. On peut aussi donner le nom d'un point : **\tkzFnText**[above](A){tex



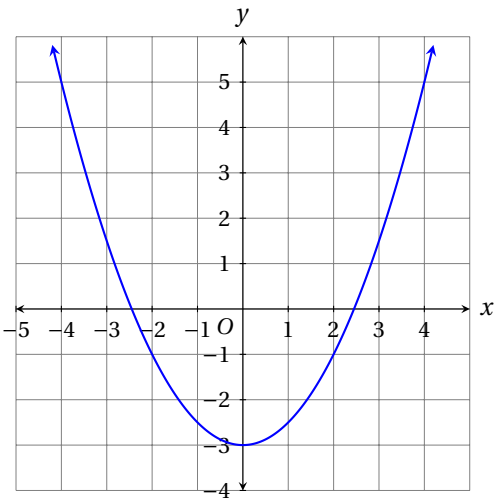

```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
 \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,
            ymin=-1,ymax=4]
 \tkzFnGrid[sub,subdx=.5,subdy=.5]
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[domain=-3:2]{(2-x)*exp(x)}
 \tkzFnText(-2,1.25){$\mathcal{C}_{f}$}
 \tkzFnRep
\end{tikzpicture}
```

3.7 Flèches aux deux extrémités : arrows

Aux États-Unis, les manuels et les calculatrices graphiques placent souvent une flèche à chaque extrémité des axes. L'option **arrows** de **\tkzFnAxes**, **\tkzFnAxisX** et **\tkzFnAxisY** choisit les flèches :

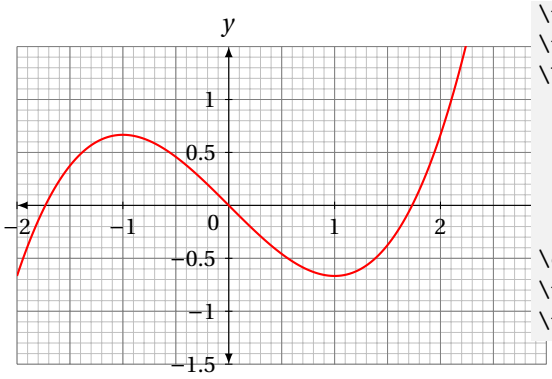
- end (par défaut) : une flèche à l'extrémité positive ;
- both : une flèche à chaque extrémité ;
- none : pas de flèche.

\tkzFnSetup{arrows=both} choisit les flèches pour tous les repères qui suivent. La forme des pointes est donnée par le style **tkzfn axis**.



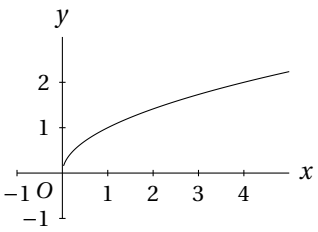

```
\begin{tikzpicture}[scale=.6]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=5,
             ymin=-4,ymax=6]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes[arrows=both]
  \tkzFnDraw[blue,thick,<->,>=stealth,
             clip=false,domain=-4.2:4.2]{x^2/2-3}
\end{tikzpicture}
```

Avec la forme américaine des nombres et des pointes différentes :




```
\tkzFnSetup{format=us,arrows=both}
\tikzset{tkzfn axis/.style={>=latex}}
\begin{tikzpicture}[scale=.7]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=3,xstep=.5,
             ymin=-1.5,ymax=1.5,ystep=.5]
  \tkzFnGrid[sub]
  \tkzFnAxes[dx=1]
  \tkzFnDraw[red,thick]{x^3/3-x}
\end{tikzpicture}
\tkzFnSetup{format=fr,arrows=end}
\tikzset{tkzfn axis/.style={->,>=stealth}}
```

Sans flèche :



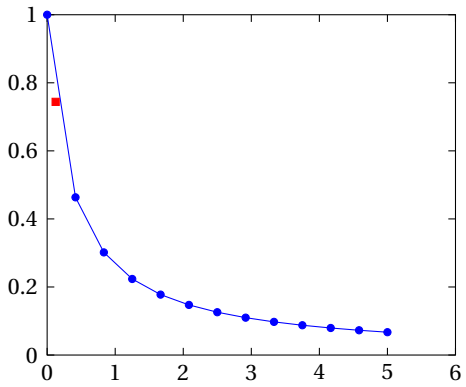

```
\begin{tikzpicture}[scale=.6]
  \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=5,
             ymin=-1,ymax=3]
  \tkzFnAxes[arrows=none]
  \tkzFnDraw{sqrt(x)}
\end{tikzpicture}
```

3.8 Présentation « boîte » : box

Cette présentation, habituelle dans les publications scientifiques et avec **pgfplots**, est peu utilisée au collège et au lycée en France. Avec **pgfplots**, elle est obtenue à l'aide de l'environnement **axis** ; avec **tkz-fn**, il suffit d'une option :

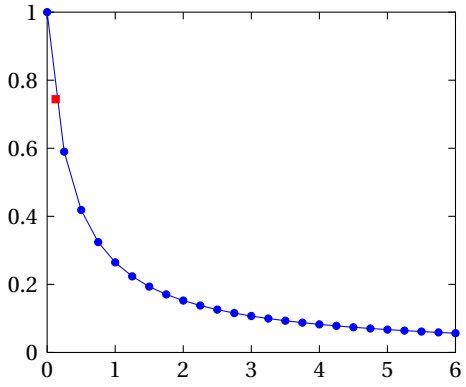
— `\tkzFnAxes[box]` : un cadre entoure la fenêtre, les graduations sont tournées vers l'intérieur sur les quatre côtés, toutes les valeurs (y compris celles des bords) sont écrites à l'extérieur, il n'y a ni flèche ni origine ;
— les noms des axes ne sont écrits que s'ils sont donnés : `xlabel` sous le cadre, `ylabel` à gauche, verticalement ;
— `\tkzFnSetup{axes=box}` choisit cette présentation pour tous les repères qui suivent ; `\tkzFnSetup{axes=school}` revient à la présentation habituelle ;
— l'option **mark** de **\tkzFnDraw** place une marque en chaque point calculé (**samples** fixe leur nombre) ;
— l'option **enlarge** de **\tkzFnInit** écarte la courbe du cadre ; le domaine par défaut reste $[x_{\min}\,;\,x_{\max}]$.

Le style du cadre est **tkzfn box**. Les exemples suivants reproduisent ceux d'une figure faite avec **pgfplots** ; ils sont écrits avec la forme américaine des nombres (avec la forme française, on obtient 0,2, 0,4…).



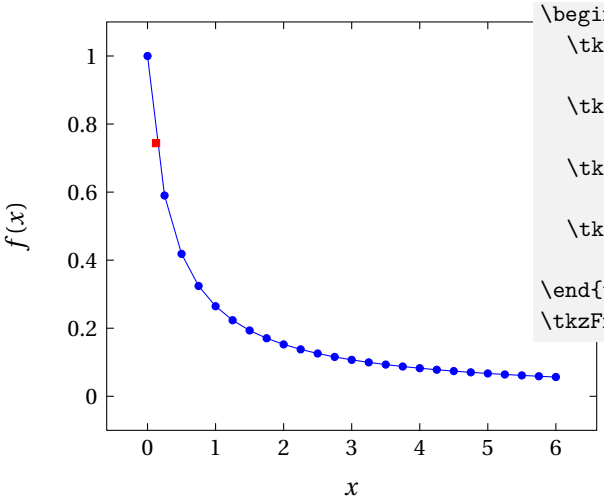

```
\tkzFnSetup{format=us}
\tkzFnDef{f}{1/((1e9*x/11.778)*3.273e-8
              -3.273e-8+1)}
\begin{tikzpicture}[scale=.9]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=6,
             ymin=0,ymax=1,ystep=.2]
  \tkzFnAxes[box]
  \tkzFnDraw[blue,mark=*,mark size=1.5pt,
             samples=13,domain=0:5](f)
  \tkzFnDrawData[red,mark=square*,
                 mark size=1.5pt]{.125/.744}
\end{tikzpicture}
```

Le domaine par défaut est $[x_{\min}\,;\,x_{\max}]$:



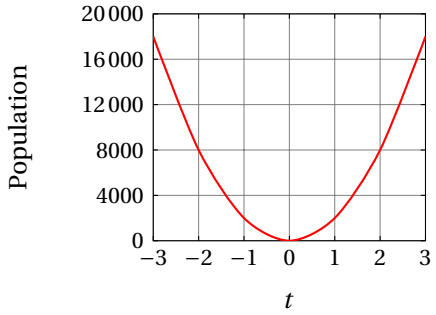

```
\begin{tikzpicture}[scale=.9]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=6,
             ymin=0,ymax=1,ystep=.2]
  \tkzFnAxes[box]
  \tkzFnDraw[blue,mark=*,mark size=1.5pt,
             samples=25](f)
  \tkzFnDrawData[red,mark=square*,
                 mark size=1.5pt]{.125/.744}
\end{tikzpicture}
```

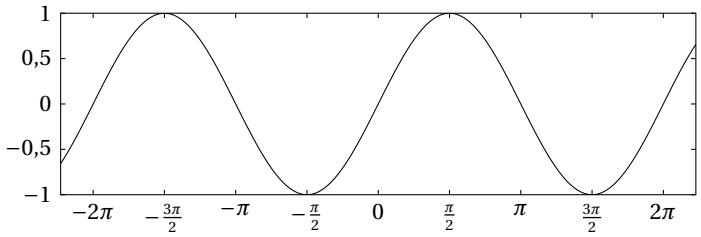
Avec **enlarge** (10 % par défaut) et les noms des axes :




```
\begin{tikzpicture}[scale=.9]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=6,ymin=0,ymax=1,
             ystep=.2,enlarge]
  \tkzFnAxes[box,xlabel=$x$,
             ylabel=$f(x)$]
  \tkzFnDraw[blue,mark=*,mark size=1.5pt,
             samples=25](f)
  \tkzFnDrawData[red,mark=square*,
                 mark size=1.5pt]{.125/.744}
\end{tikzpicture}
\tkzFnSetup{format=fr}
```

Avec \tkzFnSetup{axes=box}, la grille et les graduations en multiples de π s'utilisent comme d'habitude ; l'option **smooth** est aussi transmise à Ti*k*Z.






```
\tkzFnSetup{axes=box}
\begin{tikzpicture}[scale=.6]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=0,ymax=20000,ystep=4000]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes[xlabel=$t$,ylabel=Population]
  \tkzFnDraw[red,thick,smooth,samples=7]{2000*x^2}
\end{tikzpicture}\qquad
\begin{tikzpicture}[scale=.6]
  \tkzFnInit[xmin=-7,xmax=7,ymin=-1,ymax=1,ystep=.5]
  \tkzFnAxes[trig=2]
  \tkzFnDraw{sin(x)}
\end{tikzpicture}
\tkzFnSetup{axes=school}
```

4 Tracer une fonction

Lua détermine les points nécessaires pour tracer la courbe. Le nombre de points est fixé par l'option **samples**. Ti*k*Z trace ensuite la ligne qui joint ces points.

4.1 Définir une fonction : \tkzFnDef

\tkzFnDef{⟨nom⟩}{⟨expression⟩}

Définit une fonction de la variable x. Le nom est un nom Lua (lettres, chiffres, _). La fonction est ensuite désignée par son nom dans toutes les macros : \tkzFnDraw(f), \tkzFnTangent(f,1), \tkzFnArea(f), etc. En Lua, elle est rangée dans la table FN : FN.f(2).

arguments	exemple	explication
nom	f	nom de la fonction
expression	x^3-2*x	expression Lua en x

4.2 Tracer une fonction : \tkzFnDraw

\tkzFnDraw[⟨options⟩](⟨nom⟩) ou [⟨options⟩]{⟨expression⟩}

La fonction est désignée par son nom, ou bien donnée directement par son expression ; l'option **name** *permet alors de lui donner un nom.*

options	défaut	définition
domain	xmin:xmax	domaine du tracé
samples	200	nombre de points calculés
name		nom donné à la fonction
clip	true	la courbe est découpée à la fenêtre
mark=…		marque en chaque point calculé (**plotmarks**)
smooth		courbe lissée par TikZ

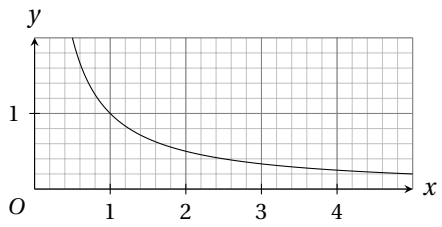
Les autres options sont celles de TikZ ; le style est **tkzfn curve**.

☞ Il faut avoir initialisé le repère à l'aide de **\tkzFnInit** avant d'appeler **\tkzFnDraw**.

☞ La courbe est interrompue là où la fonction n'est pas définie (ln(x) pour $x \leq 0$) et lorsqu'elle passe d'un bord de la fenêtre à l'autre (asymptote verticale).

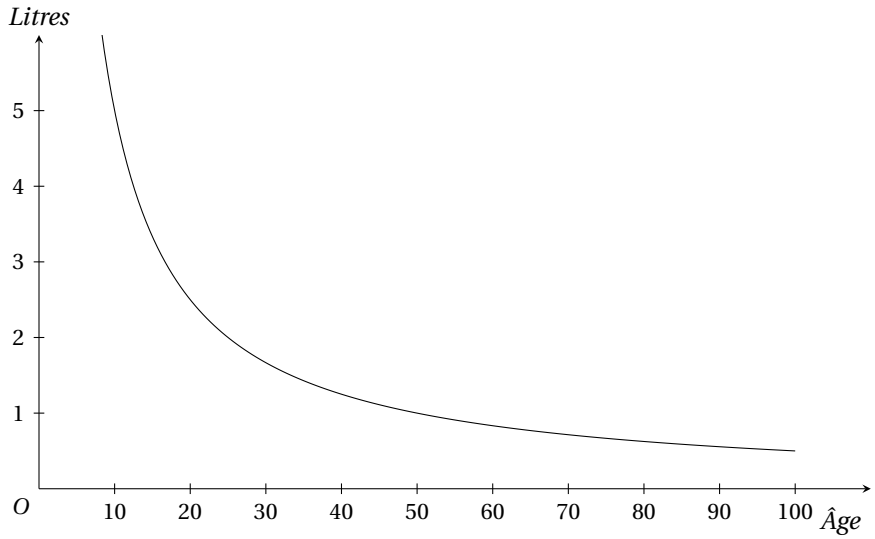
4.3 Option : samples

Pour tracer une droite, deux points suffisent : **samples=2**. On demande ici 400 points ; par défaut, la valeur choisie est 200.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
    \tkzFnInit[xmin=0,xmax=5,
               ymin=0,ymax=2]
    \tkzFnGrid[sub]
    \tkzFnAxes
    \tkzFnDraw[samples=400,
               domain=.5:5]{1/x}
\end{tikzpicture}
```

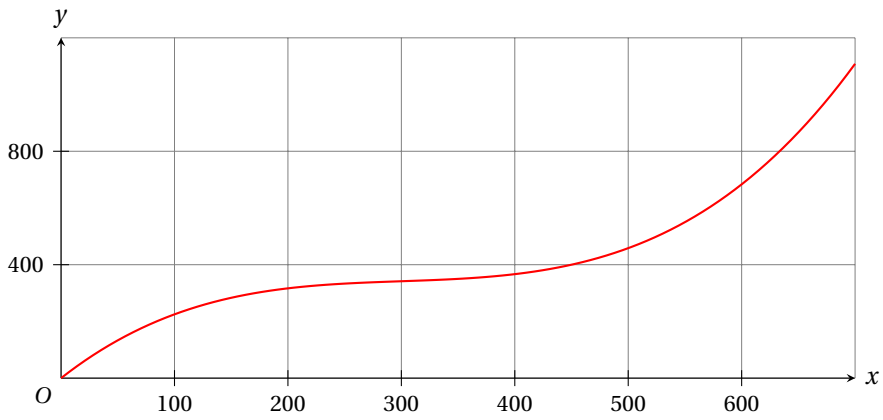
4.4 Options : xstep, ystep




```
\begin{tikzpicture}
\tkzFnInit[xmin=0,xmax=110,xstep=10,
           ymin=0,ymax=6,ystep=1]
\tkzFnAxisX[label={\textit{Âge}},
            label style={below=12pt,left}]
\tkzFnAxisY[label={\textit{Litres}}]
\tkzFnDraw[domain=0.1:100]{50/x}
\end{tikzpicture}
```

4.5 Modification de xstep et ystep

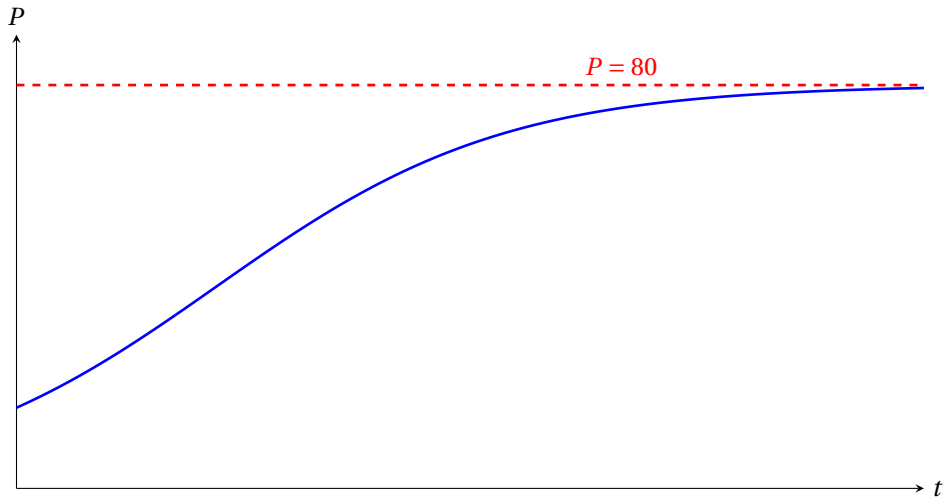
Cette fois le domaine s'étend de 0 à 700 et les valeurs prises par la fonction de 0 à 1200. Avec **tkz-fct**, il fallait écrire `\x` à la place de x et `1./90000` à la place de `1/90000`; ce n'est plus nécessaire.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=700,xstep=100,
            ymin=0,ymax=1200,ystep=400]
 \tkzFnGrid(0,0)(700,1200)  \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[color=red,samples=100,line width=0.8pt,domain=0:700]
       {(1/90000)*x^3-(1/100)*x^2+(113/36)*x}
\end{tikzpicture}
```

4.6 ystep et les fonctions constantes

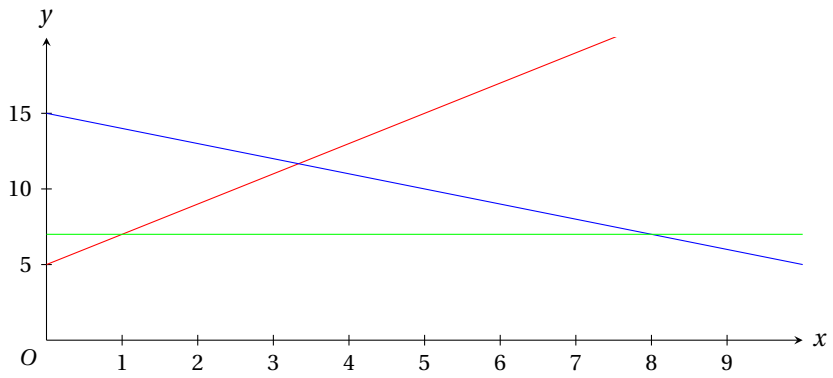
Avec **gnuplot**, 80/6 était une division euclidienne et il fallait écrire 80. ; avec Lua, les calculs sont toujours faits sur des nombres décimaux.




```
 \begin{tikzpicture}[scale=0.4]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=30,ymin=0,ymax=90,ystep=6]
 \tkzFnAxisX[ticks=false,label=$t$]
 \tkzFnAxisY[ticks=false,label=$P$]
 \tkzFnDraw[line width=1pt,color=red,dashed,domain=0:30]{80}
 \tkzFnDraw[line width=1pt,color=blue,domain=0:30]{80/(1+4*exp(-0.21*x))}
 \tkzFnText[above,color=red](20,80){$P=80$}
\end{tikzpicture}
```

4.7 Les fonctions affines ou linéaires

Pour obtenir une droite, deux points suffisent : `samples=2`.

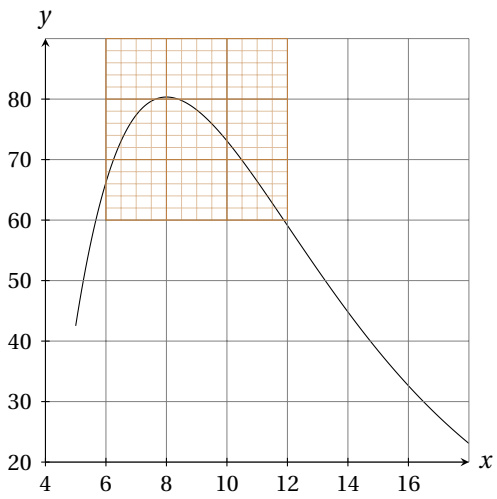



```
 \begin{tikzpicture}[]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=10,ymin=0,ymax=20,ystep=5]
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[color=red,domain=0:10,samples=2]{2*x+5}
 \tkzFnDraw[color=blue,domain=0:10,samples=2]{-x+15}
 \tkzFnDraw[color=green,domain=0:10,samples=2]{7}
\end{tikzpicture}
```

4.8 Sous-grille

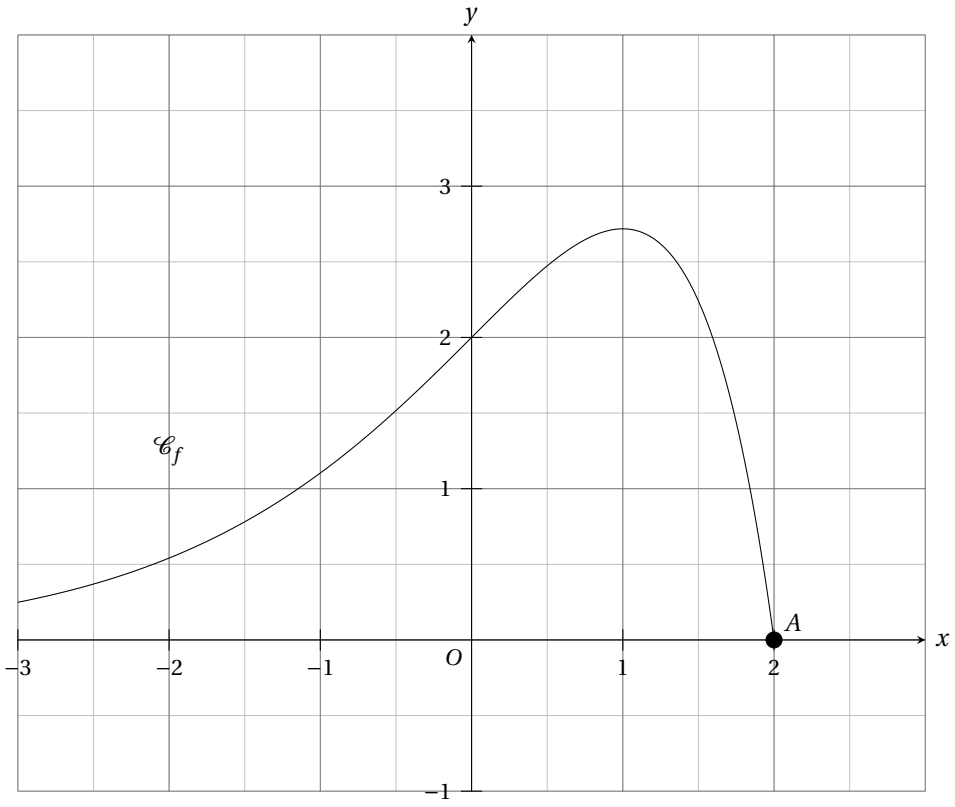
$y = (x-4)\mathrm{e}^{-0.25x+5}$

Il est possible de dessiner une autre grille sur une partie du repère (voir aussi la section précédente).




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
 \tkzFnInit[xmin=4,xmax=18,xstep=2,
            ymin=20,ymax=90,ystep=10]
 \tkzFnDraw[domain=5:18]
       {(x-4)*exp(-0.25*x+5)}
 \tkzFnGrid(4,20)(18,90)
 \tkzFnAxes
 \tkzFnGrid[sub,
            subdx=0.5,
            subdy=2,
            color=brown](6,60)(12,90)
\end{tikzpicture}
```

4.9 Textes et points




```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
 \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-1,ymax=4]
 \tkzFnGrid[sub,subdx=.5,subdy=.5]
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[domain=-3:2]{(2-x)*exp(x)}
 \tkzFnText(-2,1.25){$\mathcal{C}_{f}$}
 \tkzFnDefPointXY[draw](2,0){A}
 \tkzFnLabelPoints(A)
\end{tikzpicture}
```

5 Points

5.1 Placer un point sur une courbe : \tkzFnDefPoint

\tkzFnDefPoint[⟨options⟩](⟨nom de la fonction,x⟩){⟨nom du point⟩}

Calcule l'image de x par la fonction et définit le point de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$. *Le point est une coordonnée de TikZ : on l'utilise ensuite par son nom. Si* **tkz-elements** *est chargé, le point est aussi rangé dans la table z (section 17).*

arguments	exemple	explication
fonction,x	(f,0.5)	point d'abscisse 0,5 de la courbe de f
nom du point	A	nom de la coordonnée

options	défaut	explication
draw	false	le point est dessiné
size	1.5pt	rayon du point

Les autres options sont celles de TikZ et servent au dessin du point.

\tkzFnDefPointXY[⟨options⟩](⟨x,y⟩){⟨nom du point⟩}

Définit un point par ses coordonnées dans le repère (équivalent de **\tkzDefPoint**).

\tkzFnDrawPoints[⟨options⟩](⟨A,B,…⟩)

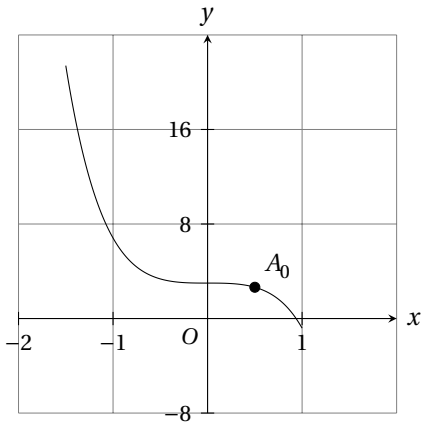
Dessine des points ; l'option **size** *donne le rayon, les autres options sont celles de TikZ. Le style est* **tkzfn point** *; il remplace* **\tkzSetUpPoint** *:*

```
\tikzset{tkzfn point/.style={draw=black,fill=yellow}}
```

\tkzFnLabelPoints[⟨options⟩](⟨A,B,…⟩)

Écrit le nom des points ; **\tkzFnLabelPoint***[options](A){texte} écrit un texte quelconque. Position par défaut :* **above right**.

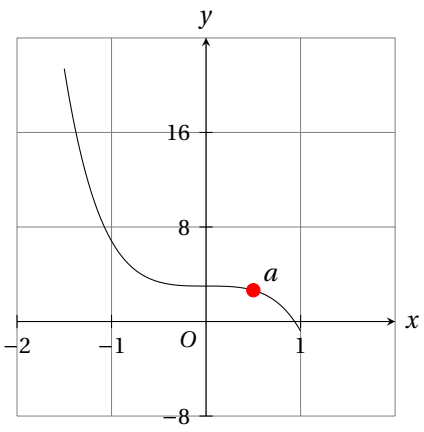
5.2 Exemple




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=2,xstep=1,
             ymin=-8,ymax=24,ystep=8]
  \tkzFnGrid  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=-1.5:1]{3-1.3125*x^5-2.5*x^3}
  \tkzFnDefPoint(f,.5){A}  \tkzFnDrawPoints(A)
  \tkzFnLabelPoint[above right](A){$A_0$}
\end{tikzpicture}
```

5.3 Option draw

Le point est défini et dessiné en une seule fois.



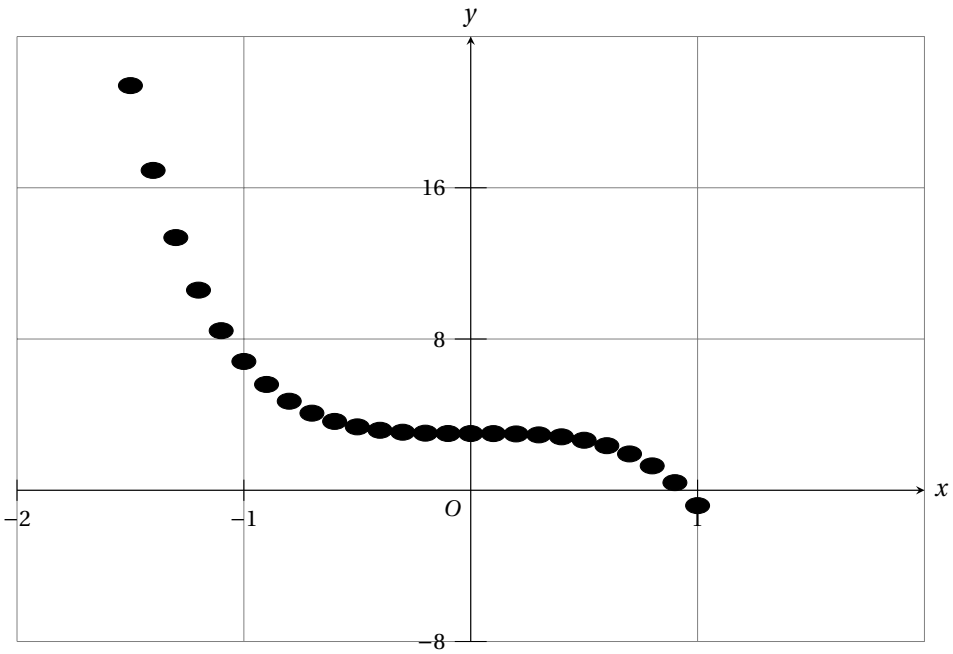

```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=2,xstep=1,
             ymin=-8,ymax=24,ystep=8]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=-1.5:1]
            {3-1.3125*x^5-2.5*x^3}
  \tkzFnDefPoint[draw,red,size=2pt](f,.5){A}
  \tkzFnLabelPoint[above right](A){$a$}
\end{tikzpicture}
```

5.4 Placer des points sans courbe : \tkzFnMarkPoints

Avec **tkz-fct**, il fallait définir la macro **\tkzFctLast** avec la syntaxe de **fp**. Il suffit maintenant de définir la fonction sans la tracer.

\tkzFnMarkPoints[⟨options⟩](⟨nom de la fonction⟩){⟨liste des abscisses⟩}

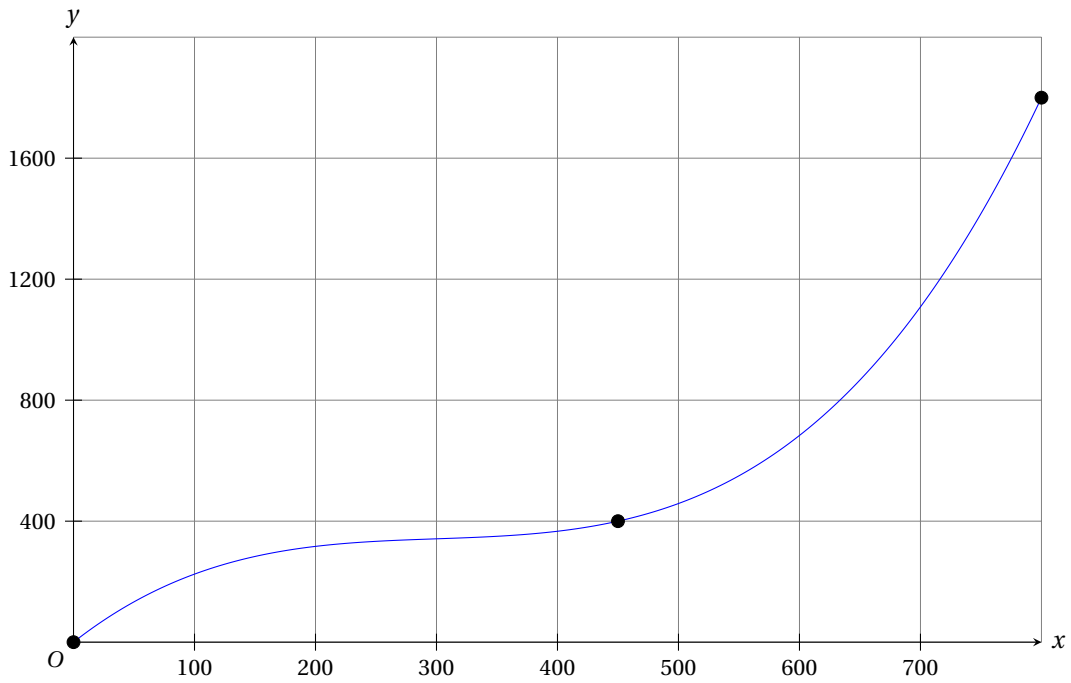
Dessine les points de la courbe dont les abscisses sont données ; la liste s'écrit comme avec **\foreach** *: -1.5,-1.4,...,1. Les points ne sont pas nommés.*




```
\begin{tikzpicture}[xscale=3,yscale=2]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=2,xstep=1,
             ymin=-8,ymax=24,ystep=8]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDef{f}{3-1.3125*x^5-2.5*x^3}
  \tkzFnMarkPoints(f){-1.5,-1.4,...,1}
\end{tikzpicture}
```

5.5 Placer des points sans se soucier des coordonnées

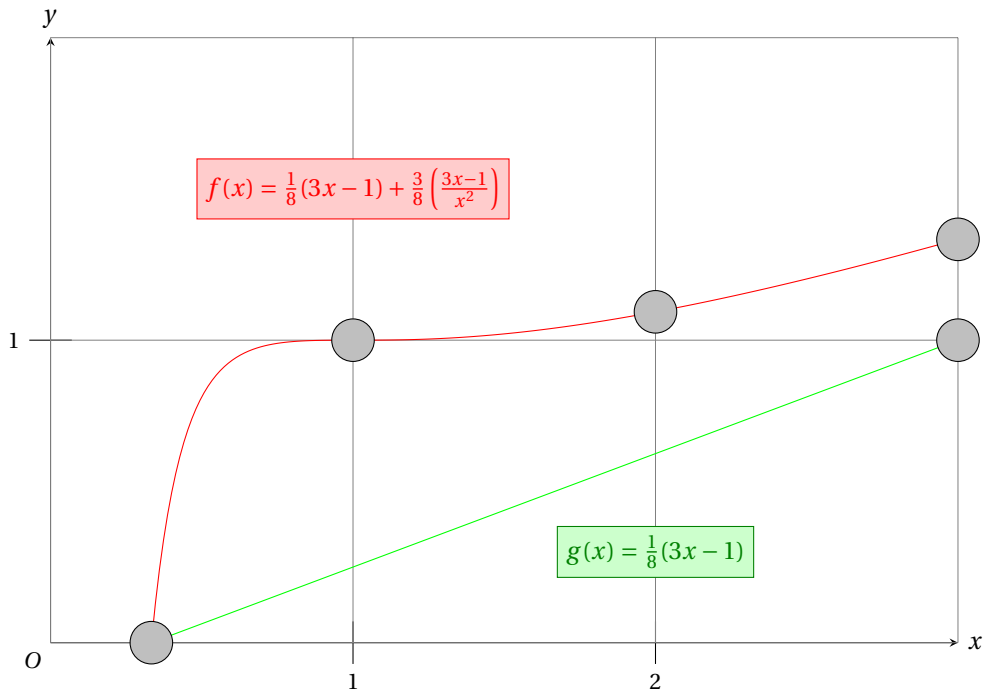
Le domaine s'étend de 0 à 800 et les valeurs prises par la fonction de 0 à 2000. Les abscisses sont données dans les unités du repère.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.6]
  \tkzFnInit[xmin  = 0,  xmax  = 800,
             ymin  = 0,  ymax  = 2000,
             xstep = 100,ystep = 400]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name   = f,
             color  = blue,
             domain = 0:800]
        {(1/90000)*x^3-(1/100)*x^2+(113/36)*x}
  \tkzFnMarkPoints(f){0,450,800}
\end{tikzpicture}
```

5.6 Placer des points avec deux fonctions

Chaque fonction a un nom : il n'y a plus d'option `with`.




```
\begin{tikzpicture}[scale=4]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=0,ymax=2]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnGrid(0,0)(3,2)
  \tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=1/3:3]
            {0.125*(3*x-1)+0.375*(3*x-1)/(x*x)}
  \tkzFnDraw[name=g,color=green,domain=1/3:3]{0.125*(3*x-1)}
  \tikzset{tkzfn point/.style={draw=black,fill=lightgray}}
  \tkzFnMarkPoints[size=2pt](f){1,2,3}
  \tkzFnMarkPoints[size=2pt](g){1/3,3}
  \tkzFnText[draw,color=red,fill=red!20](1,1.5)
          {$f(x)=\frac{1}{8}(3x-1)+\frac{3}{8}
           \left(\frac{3x-1}{x^2}\right)$}
  \tkzFnText[draw,color=green!50!black,fill=green!20]
               (2,0.3){$g(x)=\frac{1}{8}(3x-1)$}
\end{tikzpicture}
```

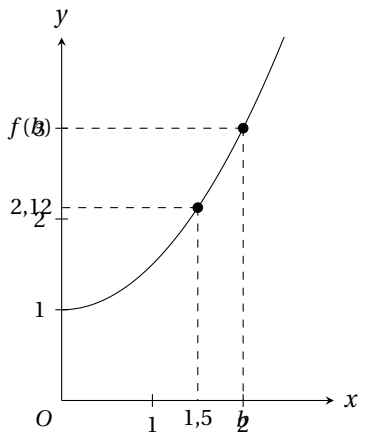
5.7 Coordonnées d'un point : \tkzFnShowCoord et \tkzFnPrintCoord

`\tkzFnShowCoord[⟨options⟩](⟨A⟩)`

Trace les segments qui joignent le point aux axes et écrit ses coordonnées (au format français ou américain). Les options `xlabel` *et* `ylabel` *remplacent les valeurs calculées ; avec* `xlabel=false`*, rien n'est écrit. Le style est* `tkzfn show coord`*.*

\tkzFnPrintCoord[⟨décimales⟩](⟨A⟩)

Écrit les coordonnées du point dans le texte.



$A\,(1{,}5\,;\,2{,}12)$

```
\begin{tikzpicture}[scale=1.2]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=0,ymax=4]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=0:2.5]{x^2/2+1}
  \tkzFnDefPoint[draw](f,1.5){A}
  \tkzFnShowCoord(A)
  \tkzFnDefPoint[draw](f,2){B}
  \tkzFnShowCoord[xlabel=$b$,
                  ylabel=$f(b)$](B)
\end{tikzpicture}

$A\tkzFnPrintCoord(A)$
```

6 Nommer les courbes

Ce qui est souhaitable, c'est de pouvoir nommer les courbes. Prenons comme exemple, la fonction f définie par :

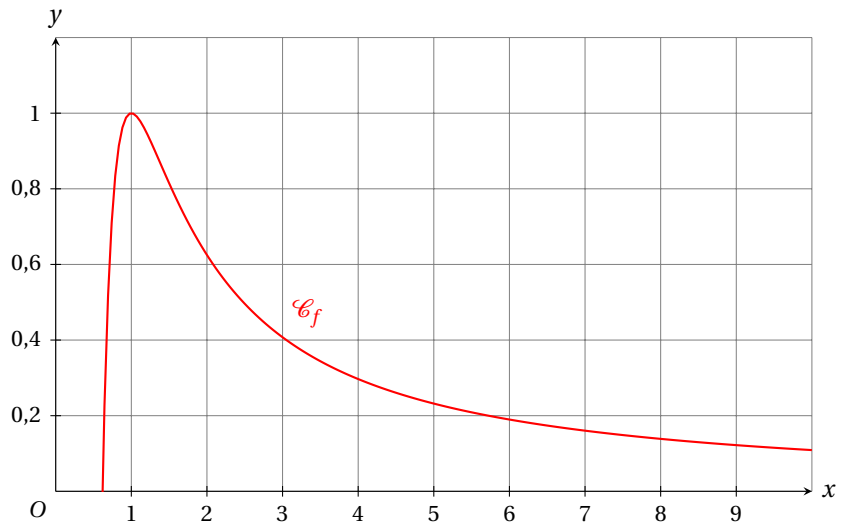
$$x > 0 \text{ et } f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3}$$

Il est aisé de mettre un titre en utilisant la macro **\tkzFnText**. Les coordonnées utilisées font référence aux unités des axes du repère. Pour placer un texte le long de la courbe, le plus simple est de définir un point de la courbe, puis d'utiliser son nom.

```
1  \tkzFnDefPoint(f,3){P}
2  \tkzFnText[above right](P){${\mathcal{C}}_f$}
```

La première ligne définit le point P de la courbe d'abscisse 3. La seconde place le texte au point P. Les options de Ti*kZ* permettent d'affiner le résultat.

6.1 Ajouter un label



Courbe de f

```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=10,
             ymin=0,ymax=1.2,ystep=0.2]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,thick,color=red,domain=0.55:10]{(x*x+x-1)/x^3}
  \tkzFnText(3,-0.3){\textbf{Courbe de} $\mathbf{f}$}
  \tkzFnDefPoint(f,3){P}
  \tkzFnText[above right,text=red](P){${\mathcal{C}}_f$}
\end{tikzpicture}
```

7 Tangentes

La pente est calculée par Lua dans les unités du repère : une tangente est donc correcte même si **xstep** et **ystep** sont différents. Chaque tangente est formée de deux demi-tangentes : à gauche (l = left) et à droite (r = right). Leurs longueurs sont données par **kl** et **kr**, en unités de l'axe des abscisses : la demi-tangente à droite va du point de contact $(a\ ;\ f(a))$ au point $(a+k_r\ ;\ f(a)+k_r f'_d(a))$. Avec $kl = 0$ ou $kr = 0$, la demi-tangente correspondante n'est pas tracée.

Si la fonction n'est pas dérivable en a, les deux demi-tangentes ont des pentes différentes ; elles sont calculées séparément.

7.1 Représentation d'une tangente : \tkzFnTangent

`\tkzFnTangent[⟨options⟩](⟨nom de la fonction,a⟩)`

arguments	exemple	explication
fonction,a	(f,0)	tangente au point d'abscisse 0
fonction	(f)	avec l'option **at**, voir section suivante

options	défaut	définition
draw	false	le point de contact est tracé
kl	1	longueur de la demi-tangente à gauche (unités de l'axe des abscisses)
kr	1	longueur de la demi-tangente à droite
clip	true	la tangente est découpée à la fenêtre
at		zeros ou extrema : tangentes en tous ces points

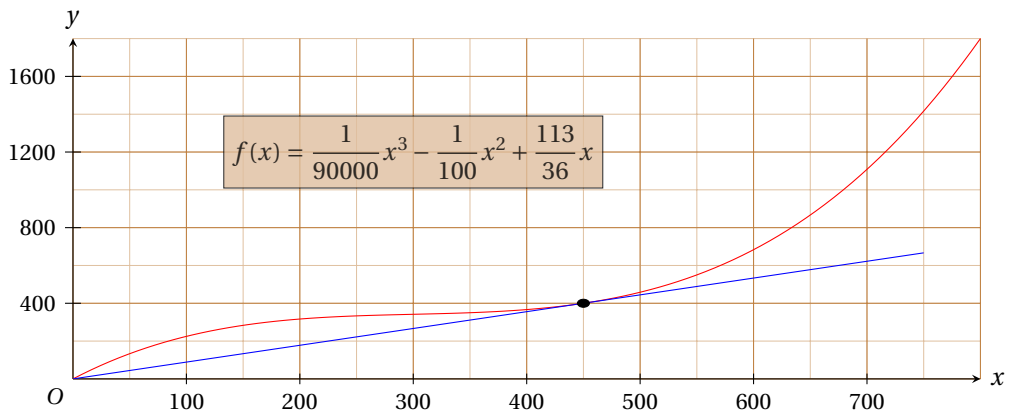
Les autres options sont celles de TikZ ; le style est **tkzfn tangent**, *vide par défaut. Pour retrouver les flèches de* ***tkz-fct*** *:*

```
\tikzset{tkzfn tangent/.style={->,>=latex}}
```

☞ La fonction n'a pas besoin d'être tracée, il suffit qu'elle soit définie.

7.2 Tangente avec xstep et ystep différents de 1

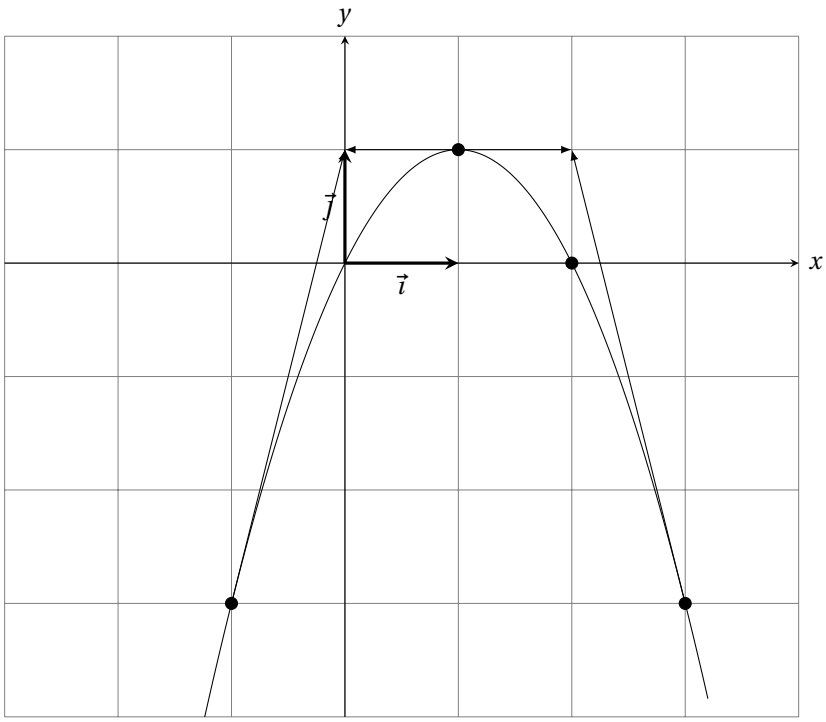
Il n'est pas nécessaire de faire des calculs : il suffit d'utiliser les valeurs qui correspondent aux graduations.



```
\begin{tikzpicture}[xscale=1.5]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=800,xstep=100,
            ymin=0,ymax=1800,ystep=400]
 \tkzFnGrid[color=brown,sub,subdx=50,subdy=200](0,0)(800,1800)
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[name=f,color=red,samples=100,domain=0:800]
    {(1/900000)*x^3-(1/100)*x^2+(113/36)*x}
 \tkzFnTangent[draw,color=blue,kr=300,kl=450](f,450)
 \tkzFnText[draw,color=black,fill=brown!50,opacity=0.8](300,1200)
 {$f(x)=\dfrac{1}{90000}x^3 -\dfrac{1}{{100}}x^2 +\dfrac{113}{36}x$}
\end{tikzpicture}
```

La pente en 450 est 0,8889 ; on l'obtient avec `\tkzFnPrint[4]{diff(f,450)}`.

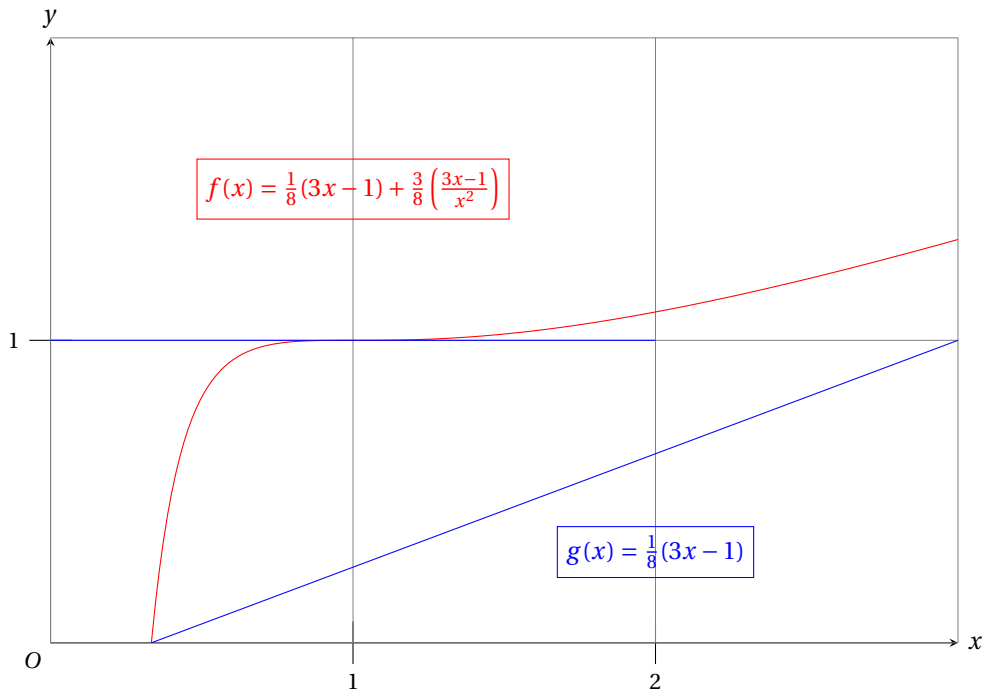
7.3 Les options kl, kr et l'option draw




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
  \tikzset{tkzfn tangent/.style={->,>=latex}}
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=4,ymin=-4,ymax=2]
  \tkzFnGrid  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnDraw[name=f,domain=-2.15:3.2]{-x*x+2*x}
  \tkzFnDefPoint[draw](f,2){A}
  \tkzFnTangent[kl=0,draw](f,-1)
  \tkzFnTangent[draw](f,1)
  \tkzFnTangent[kr=0,draw](f,3)
  \tkzFnRep
\end{tikzpicture}
```

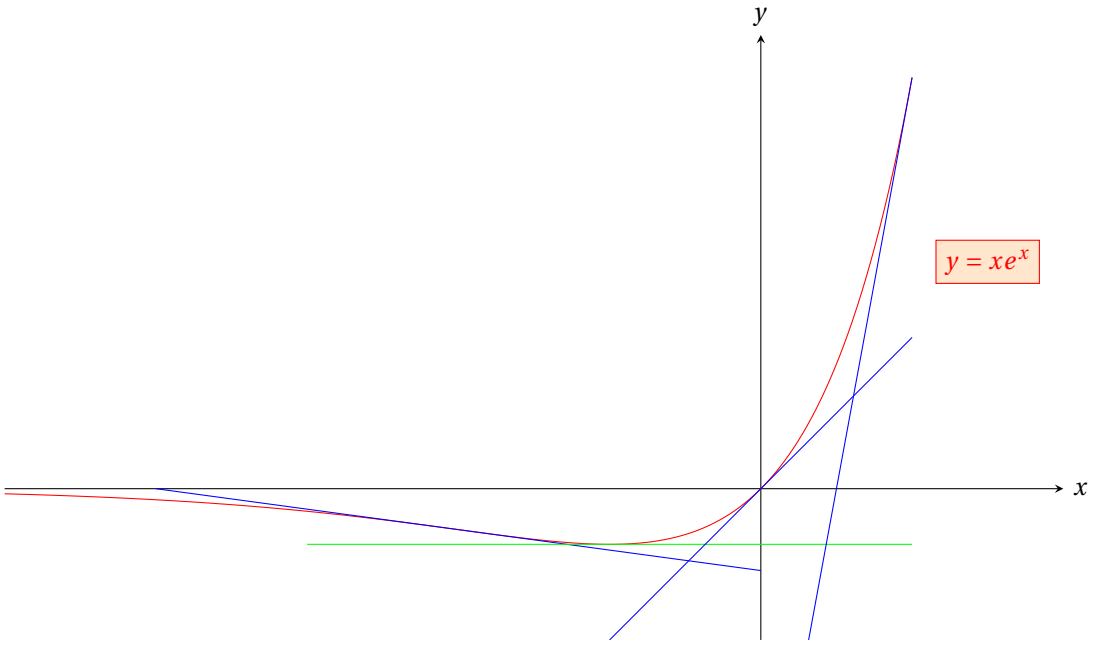
7.4 Tangente et deux fonctions

L'option **with** de **tkz-fct** n'existe plus : la fonction est désignée par son nom.




```
\begin{tikzpicture}[scale=4]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=0,ymax=2]
 \tkzFnAxes
 \tkzFnGrid(0,0)(3,2)
 \tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=1/3:3]
           {0.125*(3*x-1)+0.375*(3*x-1)/(x*x)}
 \tkzFnDraw[name=g,color=blue,domain=1/3:3]
           {0.125*(3*x-1)}
 \tkzFnTangent[color=blue](f,1)
 \tkzFnText[draw,color=red](1,1.5)
   {$f(x)=\frac{1}{8}(3x-1)+\frac{3}{8}\left(\frac{3x-1}{x^2}\right)$}
 \tkzFnText[draw,color=blue](2,0.3)
   {$g(x)=\frac{1}{8}(3x-1)$}
\end{tikzpicture}
```

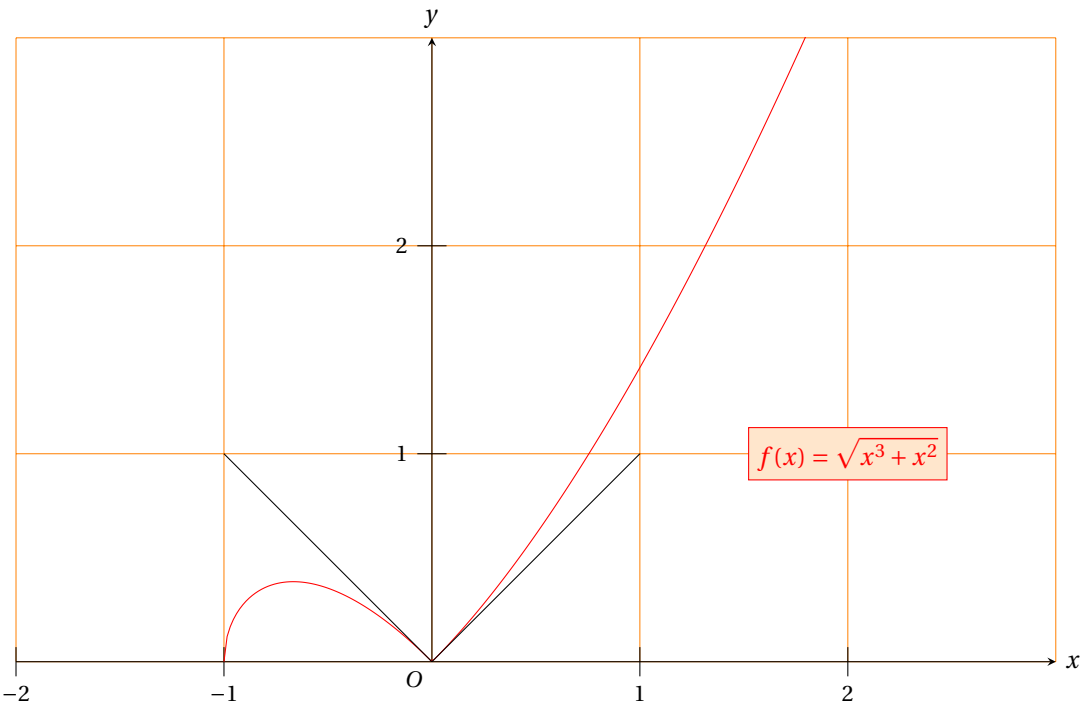
7.5 Quelques tangentes




```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=2,ymin=-1,ymax=3]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnText[draw,color=red,fill=orange!20](1.5,1.5){$y = xe^x$}
  \tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=-5:1]{x*exp(x)}
  \tkzFnTangent[color=blue,kr=2,kl=2](f,-2)
  \tkzFnTangent[color=green,kr=2,kl=2](f,-1)
  \tkzFnTangent[color=blue](f,0)
  \tkzFnTangent[color=blue,kr=0](f,1)
\end{tikzpicture}
```

7.6 Demi-tangentes

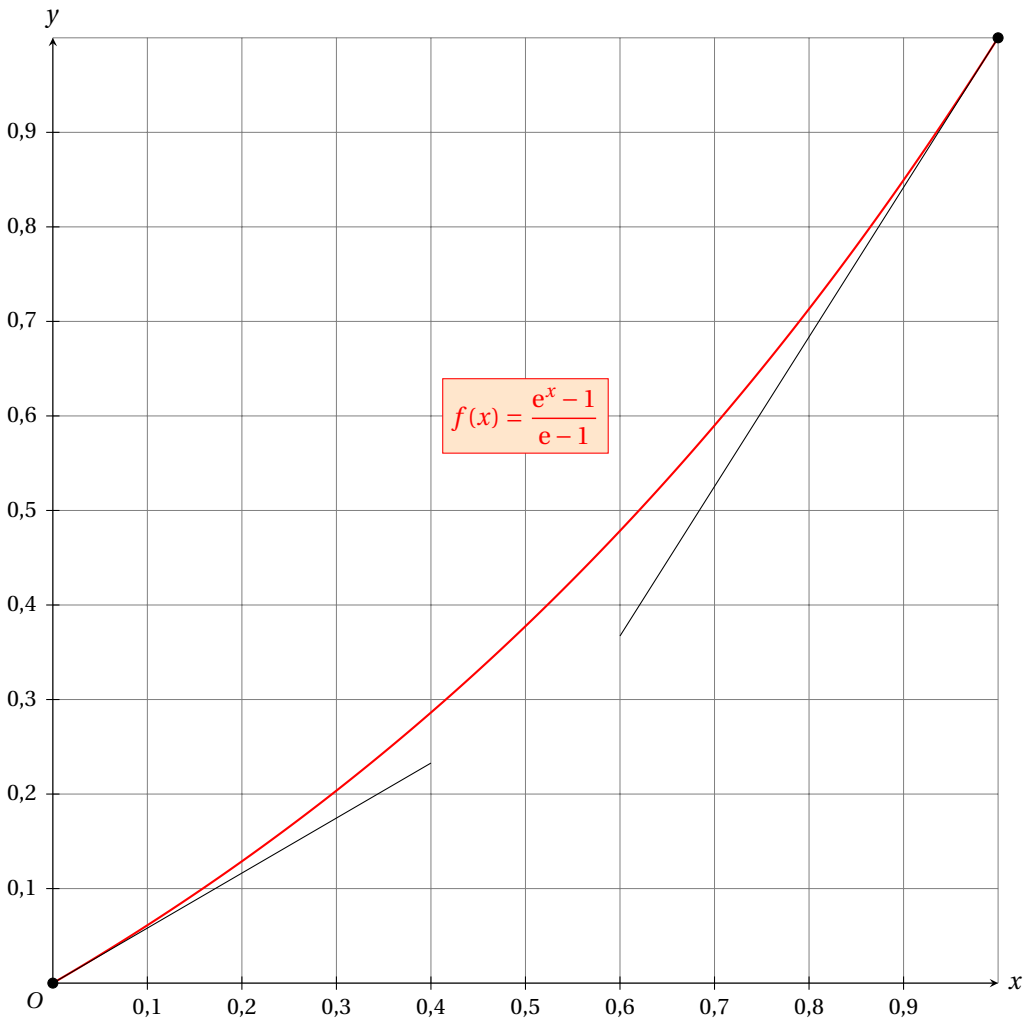
En 0, la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ n'est pas dérivable : les deux demi-tangentes sont obtenues automatiquement.




```
\begin{tikzpicture}[scale=2.75]
    \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=3,ymin=0,ymax=3]
    \tkzFnGrid[color=orange](-2,0)(3,3)
    \tkzFnAxes
    \tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=-1:2]{sqrt(x^3+x^2)}
    \tkzFnTangent(f,0)
    \tkzFnText[draw,color=red,fill=orange!20](2,1){$f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$}
\end{tikzpicture}
```

7.7 Demi-tangentes : courbe de Lorentz

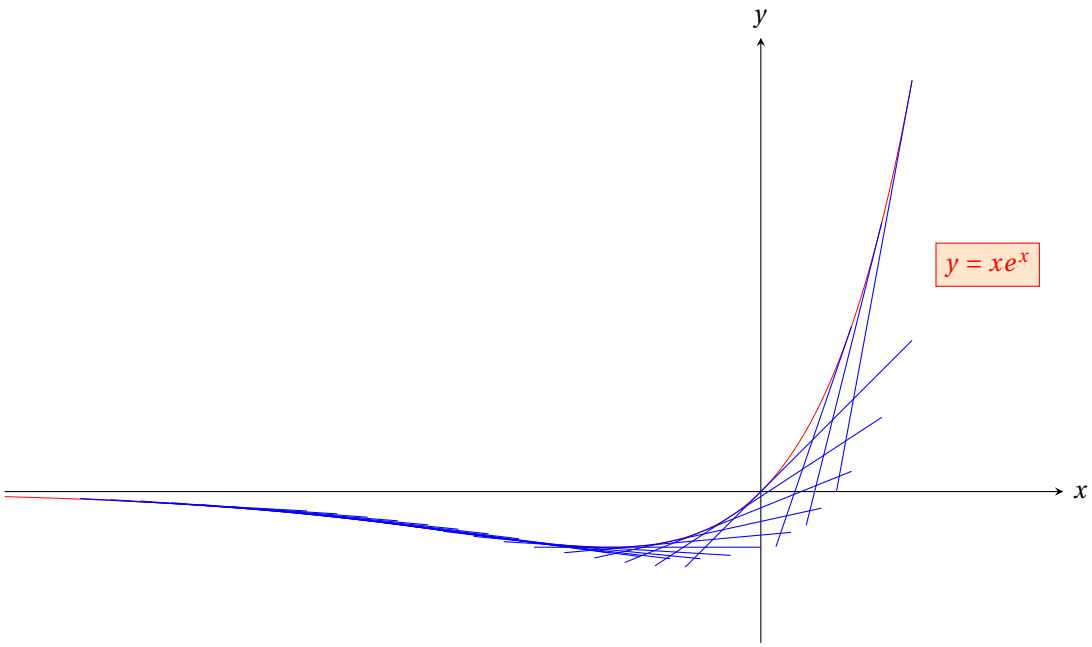
Ici, on ne veut que les demi-tangentes comprises entre 0 et 1 : il suffit de donner la valeur 0 à `kl` dans un cas et à `kr` dans l'autre.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=1,ymin=0,ymax=1,xstep=0.1,ystep=0.1]
  \tkzFnGrid(0,0)(1,1)
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,color=red,thick,domain=0:1]{(exp(x)-1)/(exp(1)-1)}
  \tkzFnTangent[draw,kl=0,  kr=0.4](f,0)
  \tkzFnTangent[draw,kl=0.4,kr=0  ](f,1)
  \tkzFnText[draw,color=red,fill=orange!20](0.5,0.6)
          {$f(x)=\dfrac{\text{e}^x-1}{\text{e}-1}$}
\end{tikzpicture}
```

7.8 Série de tangentes

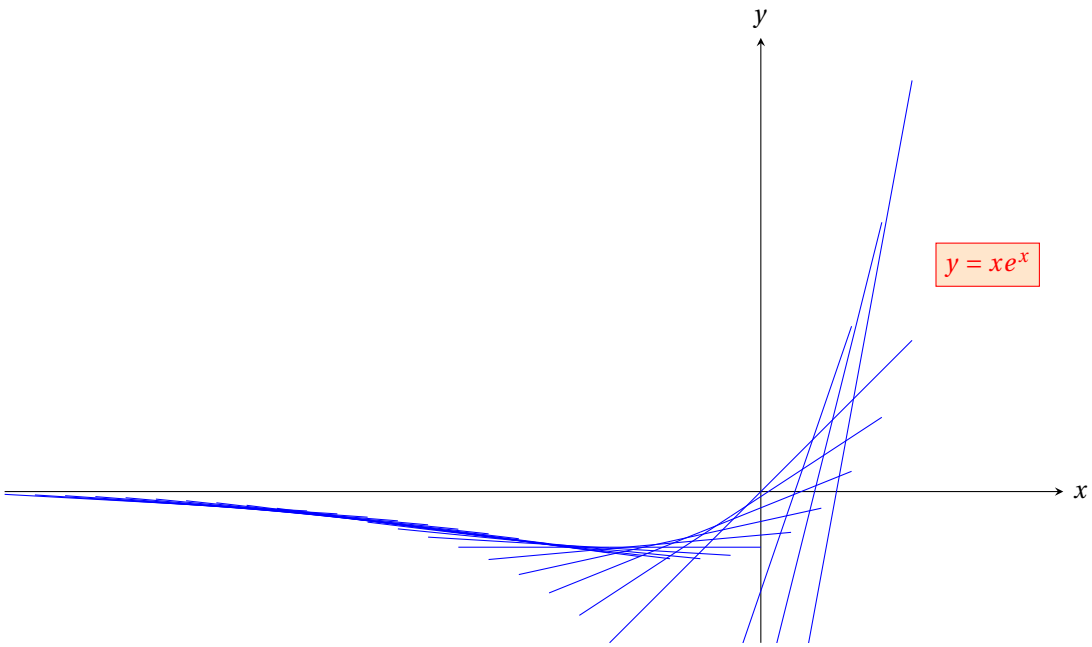
Les tangentes peuvent être tracées dans une boucle `\foreach`.




```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=2,ymin=-1,ymax=3]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnText[draw,color=red,fill=orange!20](1.5,1.5){$y = xe^x$}
  \tkzFnDraw[name=f,line width=0.01pt,color=red,domain=-5:1]{x*exp(x)}
  \foreach \v in {-4,-3.8,...,0}{
    \tkzFnTangent[color=blue,line width=.4pt,kr=1,kl=0.5](f,\v)}
  \foreach \v in {0.6,0.8,1}{
    \tkzFnTangent[color=blue,line width=.4pt,kr=0,kl=0.5](f,\v)}
\end{tikzpicture}
```

7.9 Série de tangentes sans courbe

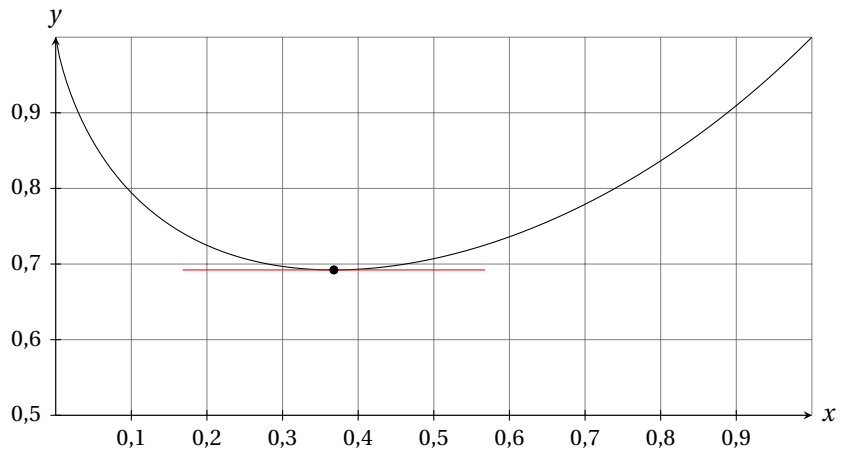
La fonction est définie par **\tkzFnDef** mais n'est pas tracée.




```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=2,ymin=-1,ymax=3]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnText[draw,color=red,fill=orange!20](1.5,1.5){$y = xe^x$}
  \tkzFnDef{f}{x*exp(x)}
  \foreach \v in {-4,-3.8,...,0}{
    \tkzFnTangent[color=blue,line width=.4pt,kl=1](f,\v)}
  \foreach \v in {0.6,0.8,1}{
    \tkzFnTangent[color=blue,line width=.4pt,kr=0,kl=.75](f,\v)}
\end{tikzpicture}
```

7.10 Abscisse donnée par une expression

L'abscisse du point de contact peut être une expression Lua ; si elle contient des parenthèses, on la place entre accolades.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=1,xstep=0.1,
             ymin=0.5,ymax=1,ystep=0.1]
  \tkzFnGrid \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=0.00001:1]{x^x}
  \tkzFnTangent[draw,color=red,kr=0.2,kl=0.2](f,{1/exp(1)})
\end{tikzpicture}
```

8 Zéros et extremums

Lua trouve tous les zéros d'une fonction sur un intervalle : l'intervalle est découpé en **samples** pas, chaque changement de signe est affiné par dichotomie, et les zéros sans changement de signe (racine double, la courbe touche l'axe) sont aussi détectés. Un changement de signe sans annulation, de part et d'autre d'une asymptote, n'est pas pris pour un zéro. Les extremums sont les zéros de la dérivée où celle-ci change de signe.

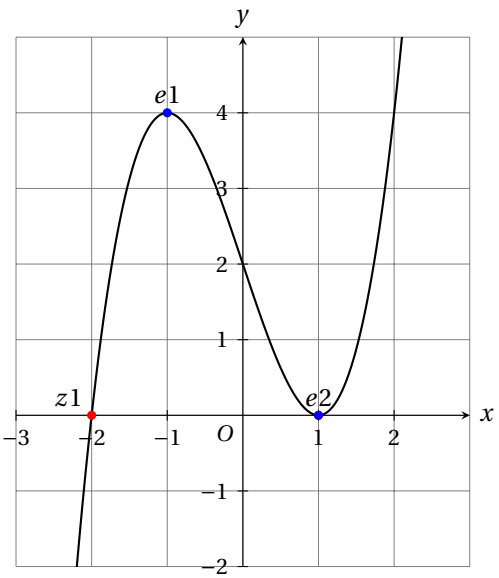
8.1 Définir les zéros : \tkzFnZeros

\tkzFnZeros[⟨options⟩](⟨nom de la fonction⟩)

Définit les points z1, z2, … de la courbe, dans l'ordre des abscisses croissantes. Leur nombre est dans **\tkzFnNbZeros**. *Dans un environnement* tikzpicture, *les points sont aussi des nœuds TikZ ; en dehors, ils sont seulement mémorisés, pour* **\tkzFnPrintCoord**.

options	défaut	définition
at	zeros	zeros ou extrema
domain	xmin:xmax	intervalle de recherche
samples	400	nombre de pas du balayage
name	z	préfixe des noms des points
draw	false	les points sont tracés
size	1.5pt	rayon des points

Les autres options sont celles de TikZ, pour le tracé des points.




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-2,ymax=5]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[thick,name=g]{(x-1)^2*(x+2)}
  \tkzFnZeros[draw,red](g)
  \tkzFnLabelPoints[above left](z1)
  \tkzFnZeros[at=extrema,name=e,draw,blue](g)
  \tkzFnLabelPoints[above](e1,e2)
\end{tikzpicture}
```

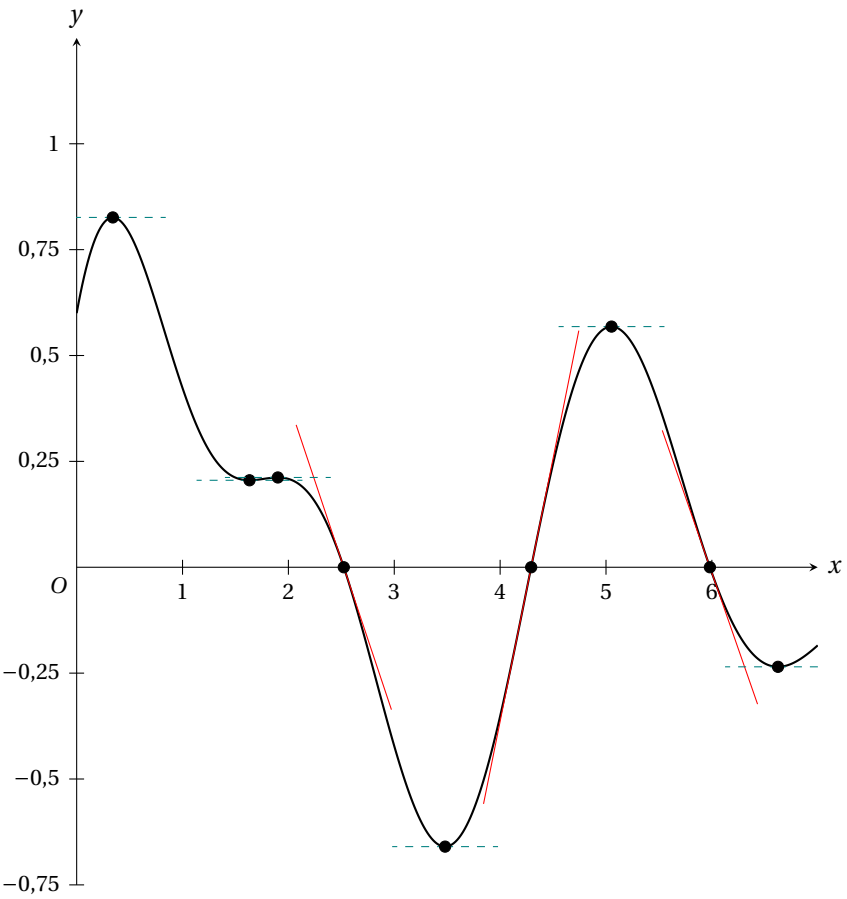
$g(x) = (x-1)^2(x+2)$ a 2 zéros : $z_1 = (-2\,;0)$ et la racine double $z_2 = (1\,;0)$, confondu avec le minimum local e_2. Le maximum local est $e_1 = (-1\,;4)$.

Le texte ci-dessus est écrit avec `\tkzFnZeros(g)\tkzFnNbZeros{} zéros : $z_1=\tkzFnPrintCoord(z1)$`, après le dessin.

8.2 Tangentes aux zéros et aux extremums

Avec l'option **at**, **\tkzFnTangent** n'a pas besoin d'abscisse : il trace la tangente en chaque zéro (at=zeros) ou la tangente horizontale en chaque extremum (at=extrema). Les options **domain** et **samples** ont le même sens que pour **\tkzFnZeros**, les autres options sont celles de **\tkzFnTangent**.

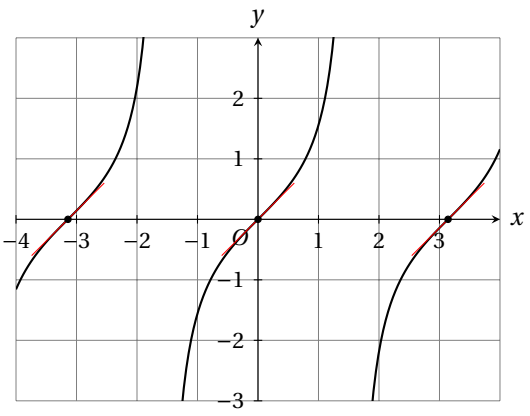
$f(x) = \mathrm{e}^{-x/5}\big(\sin(1{,}5x) + 0{,}6\cos(2{,}5x)\big)$: aucun de ces points ne se calcule à la main. Les deux extremums proches de $x \approx 1{,}7$ sont bien séparés.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.4]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=7,ymin=-0.75,ymax=1.25,ystep=0.25]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,samples=400,thick]
     {exp(-x/5)*(sin(1.5*x)+0.6*cos(2.5*x))}
  \tkzFnTangent[at=zeros,draw,red,kl=.45,kr=.45](f)
  \tkzFnTangent[at=extrema,draw,teal,dashed,kl=.5,kr=.5](f)
\end{tikzpicture}
```

8.3 Fonction discontinue

tan change de signe de part et d'autre de chaque asymptote sans s'annuler : ces changements de signe sont écartés.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-4,xmax=4,ymin=-3,ymax=3]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[thick,name=t]{tan(x)}
  \tkzFnTangent[at=zeros,draw,red,
                kl=.6,kr=.6](t)
\end{tikzpicture}
```

8.4 Limites

— Deux zéros plus proches qu'un pas du balayage peuvent être manqués : augmenter **samples** ou réduire **domain**.

— Les bornes de l'intervalle ne sont jamais des extremums : seuls les points où la dérivée s'annule en changeant de signe sont retenus. Pour $x \mapsto x^3$, il n'y a pas d'extremum en 0.

9 Surfaces

Il s'agit de représenter la partie du plan comprise entre la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, ou bien la partie du plan comprise entre deux courbes.

9.1 Représentation d'une surface : \tkzFnArea

`\tkzFnArea[⟨options⟩](⟨f⟩)` **ou** `[⟨options⟩](⟨f,g⟩)`

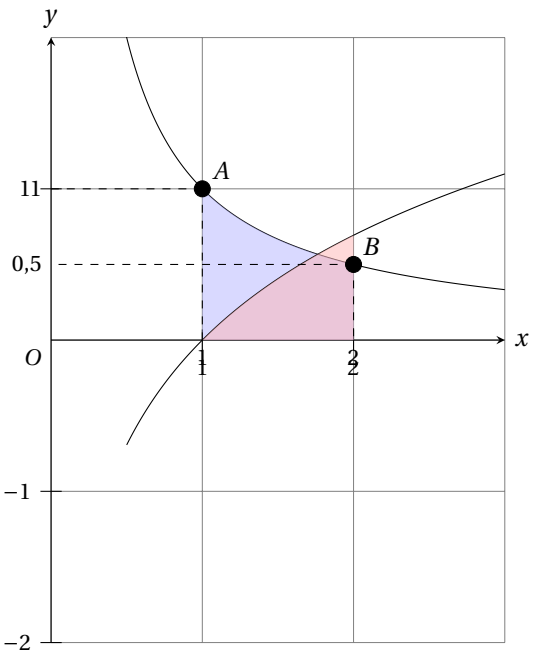
Avec un seul argument, la surface est comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses. Avec deux arguments, elle est comprise entre les courbes de f et de g ; g peut être un nombre : `(f,12)`.

options	défaut	définition
`domain`	`xmin:xmax`	intervalle $[a\ ;\ b]$
`where`	`both`	`above` : seulement là où $f \geq g$; `below` : là où $f \leq g$
`samples`	`200`	nombre de points
`clip`	`true`	la surface est découpée à la fenêtre

*Les autres options sont celles de TikZ (**`fill`**, **`pattern`**, **`opacity`**…) ; le style est **`tkzfn area`**.*

☞ Les fonctions n'ont pas besoin d'être tracées ; l'ordre de tracé (avant ou après la surface) permet de choisir ce qui est au premier plan.

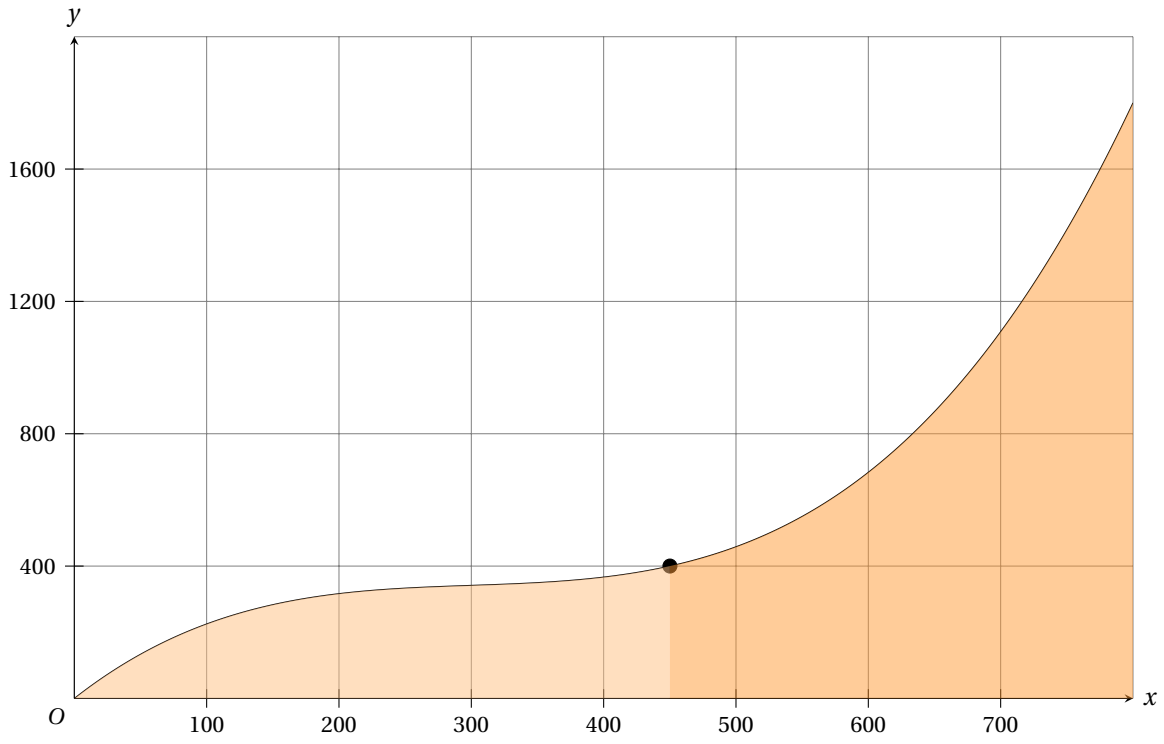
9.2 Naissance de la fonction logarithme népérien



```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,xstep=1,
            ymin=-2,ymax=2,ystep=1]
 \tkzFnGrid
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[name=f,domain=0.4:3]{1/x}
 \tkzFnDefPoint(f,1){A}
 \tkzFnDefPoint(f,2){B}
 \tkzFnLabelPoints[above right](A,B)
 \tkzFnArea[fill=blue!30,domain=1:2](f)
 \tkzFnDraw[name=g,domain=0.5:3]{ln(x)}
 \tkzFnArea[fill=red!30,domain=1:2](g)
 \tkzFnShowCoord(A)
 \tkzFnShowCoord(B)
 \tkzFnDrawPoints(A,B)
\end{tikzpicture}
```

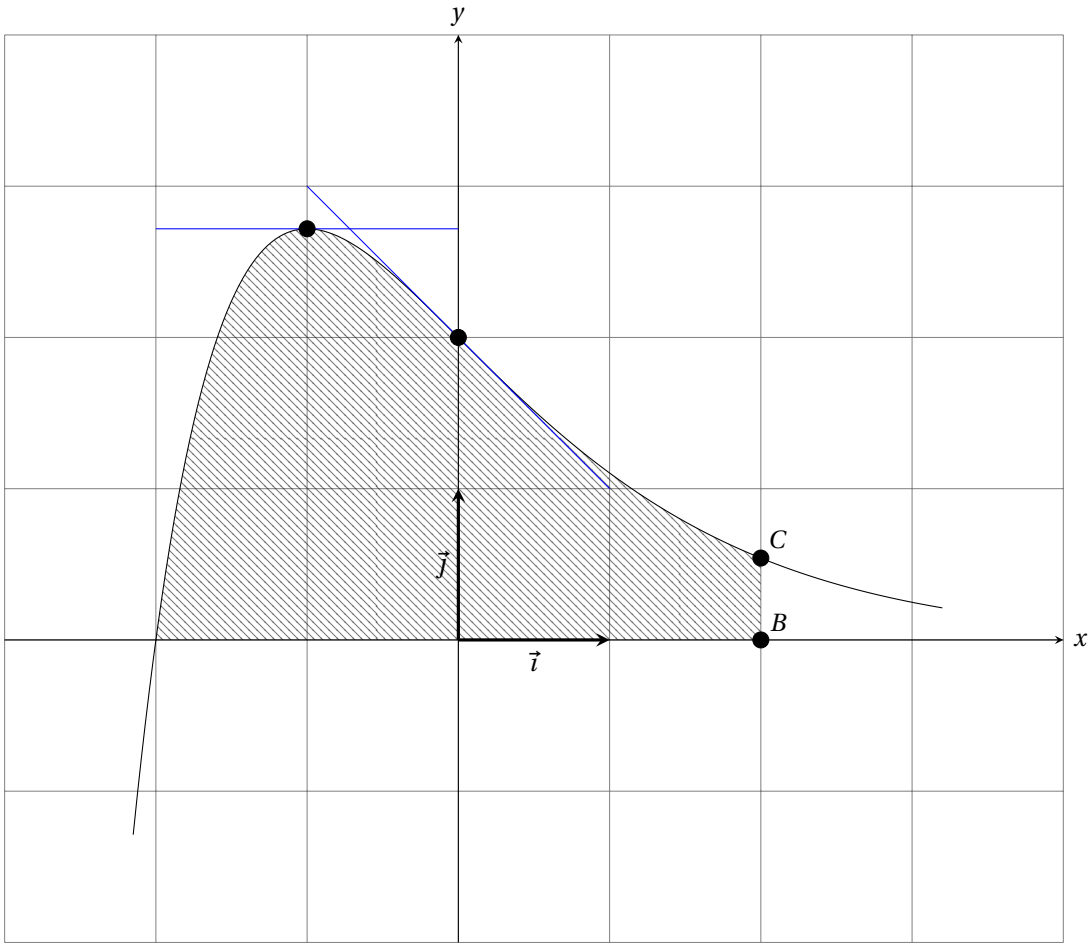
Les deux aires sont égales à $\ln 2 \approx 0{,}6931$ et $2\ln 2 - 1 \approx 0{,}3863$: `\tkzFnPrint[4]{integral(f,1,2)}`.

9.3 Surface simple



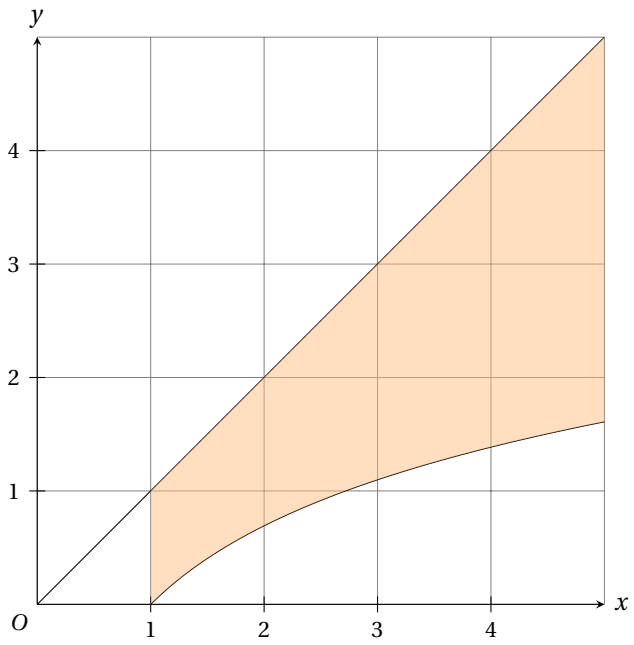
```
\begin{tikzpicture}[scale=1.75]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=800,xstep=100,
            ymin=0,ymax=2000,ystep=400]
 \tkzFnGrid
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[name=f,domain=0:800]
     {(1/90000)*x^3-(1/100)*x^2+(113/36)*x}
 \tkzFnDefPointXY[draw](450,400){a}
 \tkzFnArea[fill=orange!50,domain=0:450](f)
 \tkzFnArea[fill=orange!80,domain=450:800](f)
\end{tikzpicture}
```

9.4 Surface et hachures



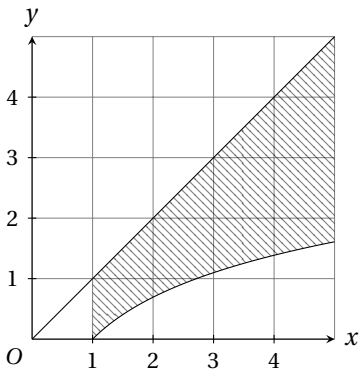

```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=4,ymin=-2,ymax=4]
  \tkzFnGrid(-3,-2)(4,4)
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnDraw[name=f,domain=-2.15:3.2]{(2+x)*exp(-x)}
  \tkzFnArea[pattern=north west lines,domain=-2:2](f)
  \tkzFnTangent[draw,color=blue](f,0)
  \tkzFnTangent[draw,color=blue](f,-1)
  \tkzFnDefPoint(f,2){C}
  \tkzFnDefPointXY(2,0){B}
  \tkzFnDrawPoints(B,C)  \tkzFnLabelPoints[above right](B,C)
  \tkzFnRep
\end{tikzpicture}
```

9.5 Surface comprise entre deux courbes en couleur




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=5,ymin=0,ymax=5]
  \tkzFnGrid  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=0:5]{x}
  \tkzFnDraw[name=g,domain=1:5]{ln(x)}
  \tkzFnArea[fill=orange!50,domain=1:5](f,g)
\end{tikzpicture}
```

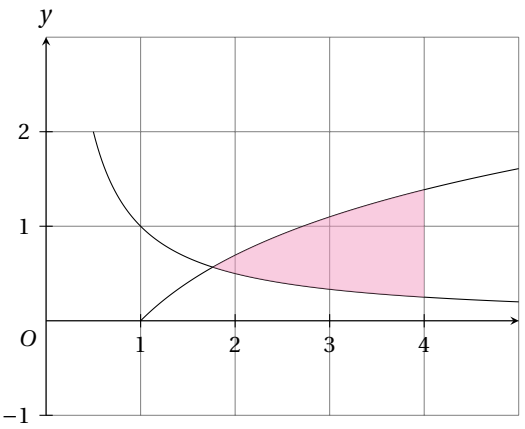
9.6 Surface comprise entre deux courbes avec des hachures




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=5,ymin=0,ymax=5]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=0:5]{x}
  \tkzFnDraw[name=g,domain=1:5]{ln(x)}
  \tkzFnArea[pattern=north west lines,domain=1:5](f,g)
\end{tikzpicture}
```

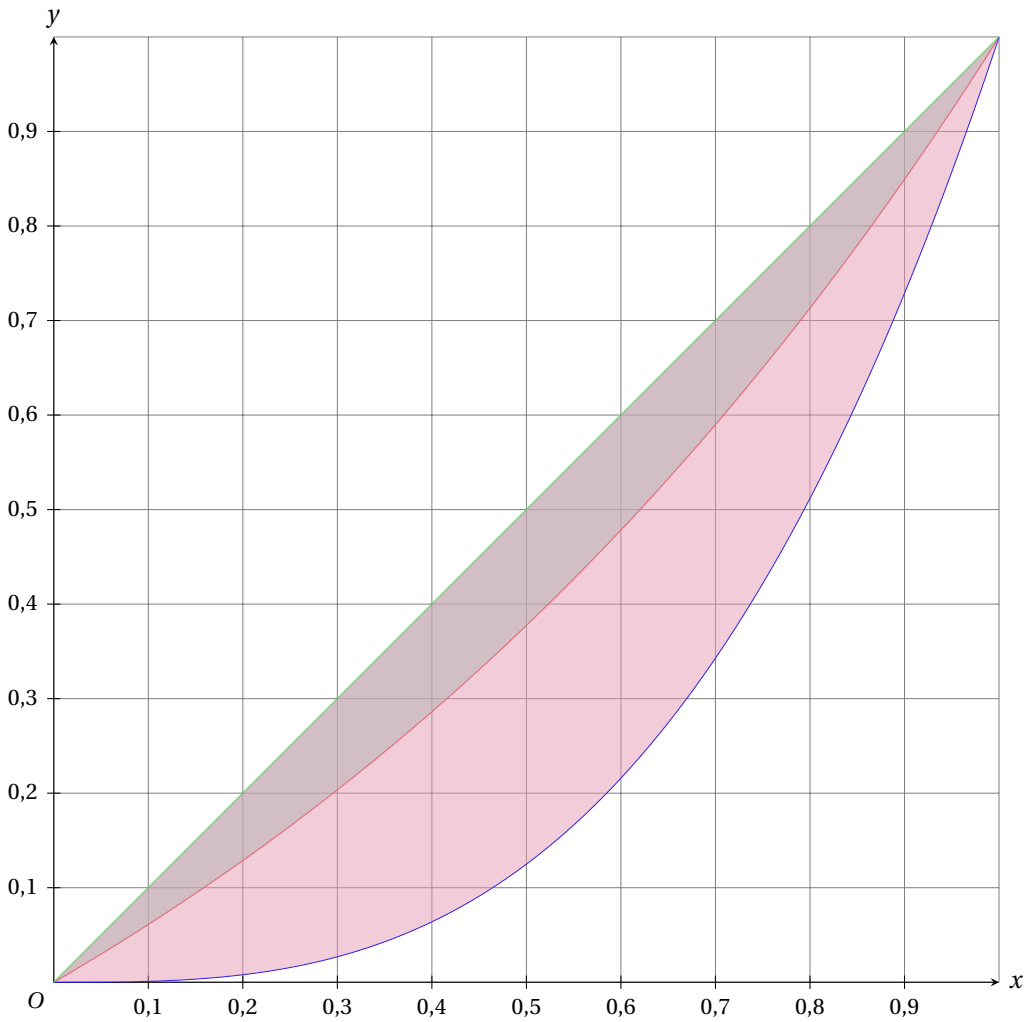
9.7 Surface comprise entre deux courbes : option where

Les courbes se coupent. Avec **where=above**, seule la partie où la courbe de g est au-dessus de celle de f est représentée.



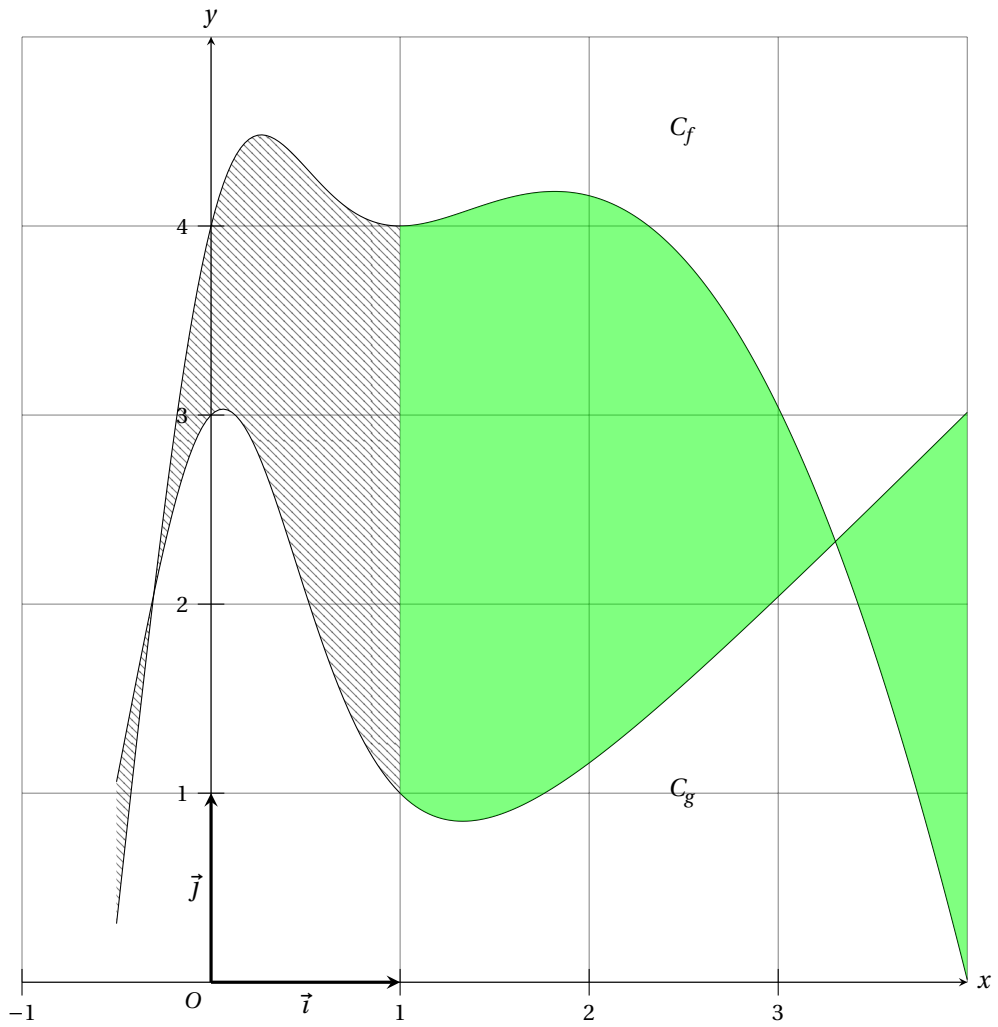

```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=5,
            ymin=-1,ymax=3]
 \tkzFnGrid
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[name=f,domain=0.5:5]{1/x}
 \tkzFnDraw[name=g,domain=1:5]{ln(x)}
 \tkzFnArea[where=above,
            fill=magenta!50,
            domain=1:4](g,f)
\end{tikzpicture}
```

9.8 Surface comprise entre deux courbes : courbes de Lorentz




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=1,ymin=0,ymax=1,xstep=0.1,ystep=0.1]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=0:1]{(exp(x)-1)/(exp(1)-1)}
  \tkzFnDraw[name=g,color=blue,domain=0:1]{x^3}
  \tkzFnDraw[name=h,color=green,domain=0:1]{x}
  \tkzFnArea[fill=purple!40,domain=0:1](h,g)
  \tkzFnArea[fill=gray!60,domain=0:1](h,f)
\end{tikzpicture}
```

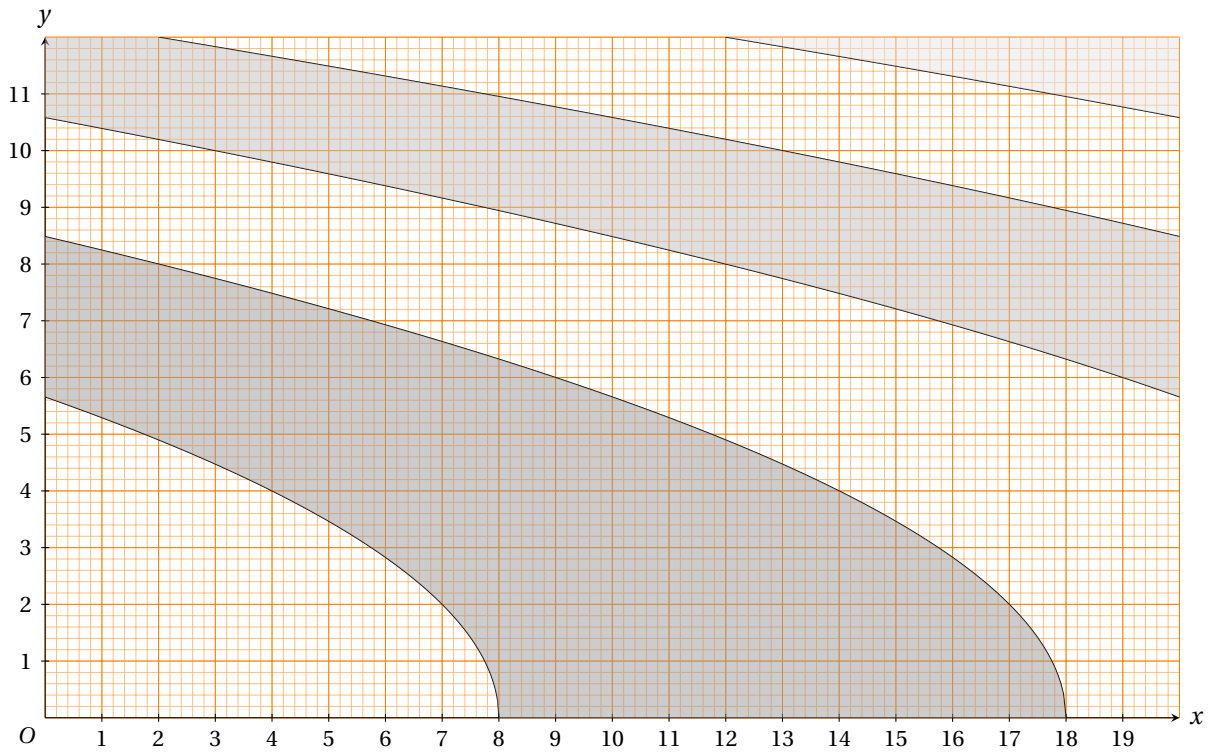
9.9 Mélange de styles




```
\begin{tikzpicture}[scale=2.5]
   \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=4,ymin=0,ymax=5]
   \tkzFnGrid
   \tkzFnAxes
   \tkzFnDraw[name=f,domain=-.5:4]{4*x-x^2+4/(x^2+1)^2}
   \tkzFnDraw[name=g,domain=-.5:4]{x-1+4/(x^2+1)^2}
   \tkzFnArea[fill=green,domain=1:4](f,g)
   \tkzFnArea[pattern=north west lines,domain=-.5:1](f,g)
   \tkzFnRep
   \tkzFnText(2.5,4.5){$C_f$}
   \tkzFnText(2.5,1){$C_g$}
\end{tikzpicture}
```

9.10 Courbes de niveaux

Avec **tkz-fct**, il fallait définir des macros pour les fonctions constantes ; il suffit maintenant d'écrire le nombre comme second argument (lignes 10 à 14).




```
1  \begin{tikzpicture}[scale=.75]
2   \tkzFnInit[xmin=0,xmax=20,ymin=0,ymax=12]
3   \tkzFnGrid[color=orange,sub](0,0)(20,12)
4   \tkzFnAxes
5   \tkzFnDraw[name=a,samples=400,domain=0:8]{(32-4*x)^0.5}
6   \tkzFnDraw[name=b,samples=400,domain=0:18]{(72-4*x)^0.5}
7   \tkzFnDraw[name=c,samples=400,domain=0:20]{(112-4*x)^0.5}
8   \tkzFnDraw[name=d,samples=400,domain=2:20]{(152-4*x)^0.5}
9   \tkzFnDraw[name=e,samples=400,domain=12:20]{(192-4*x)^0.5}
10  \tkzFnArea[fill=gray!80,domain=0:8](b,a)
11  \tkzFnArea[fill=gray!80,domain=8:18](b,0)
12  \tkzFnArea[fill=gray!50,domain=2:20](d,c)
13  \tkzFnArea[fill=gray!50,domain=0:2](12,c)
14  \tkzFnArea[fill=gray!20,domain=12:20](12,e)
15 \end{tikzpicture}
```

10 Sommes de Riemann

`\tkzFnRiemann[⟨options⟩](⟨nom de la fonction⟩)`

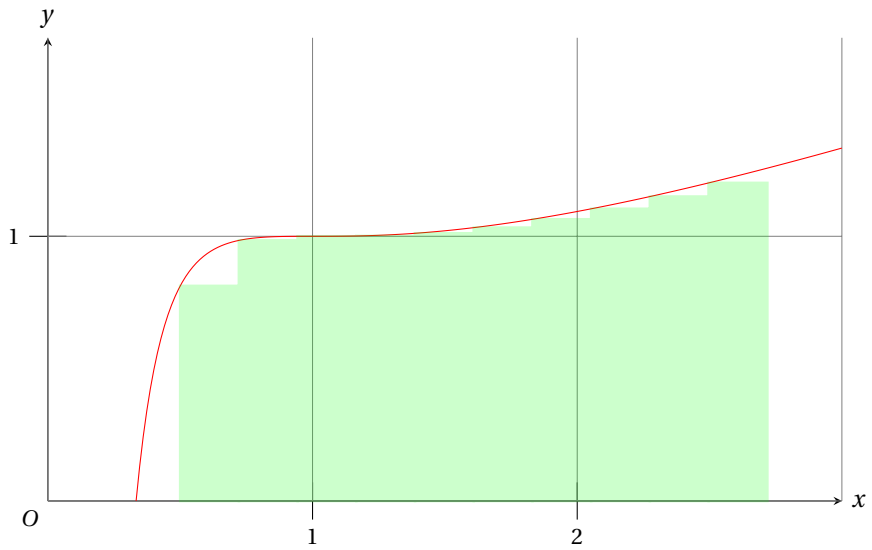
Représente les rectangles d'une somme de Riemann. Les quatre macros de **tkz-fct** *sont réunies en une seule ; la méthode est choisie avec une option.*

options	défaut	définition
interval	xmin:xmax	intervalle sur lequel la méthode est appliquée
number	10	nombre de sous-intervalles
method	left	hauteur des rectangles : voir ci-dessous
clip	false	les rectangles sont découpés à la fenêtre

méthode	hauteur du rectangle $[x_i\,;\,x_{i+1}]$
left	$f(x_i)$
right	$f(x_{i+1})$
mid	$f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$
inf	$\min\left(f(x_i), f(x_{i+1})\right)$
sup	$\max\left(f(x_i), f(x_{i+1})\right)$

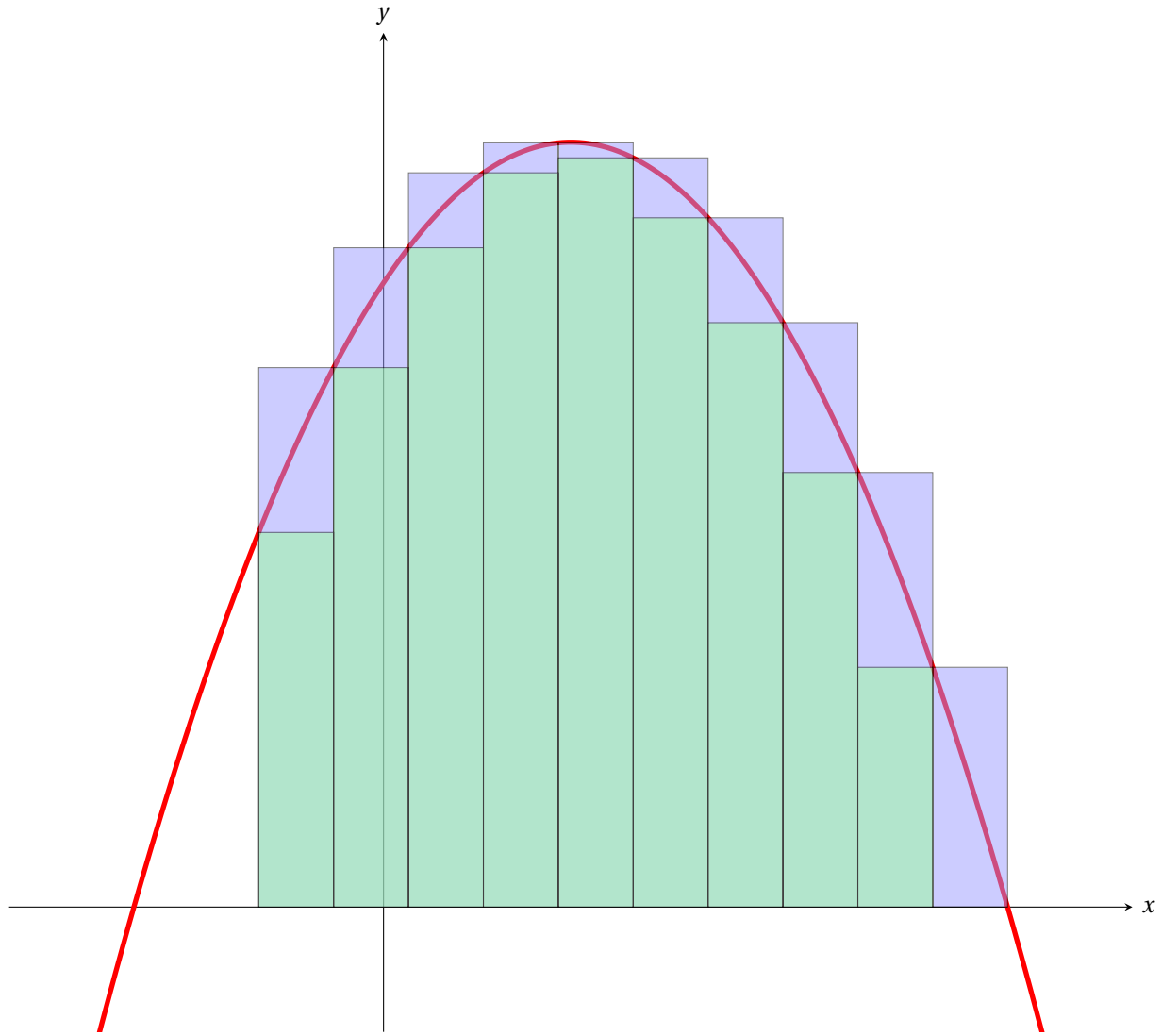
Les autres options sont celles de TikZ ; le style est **tkzfn riemann**. *La valeur de la somme est donnée par* `riemann(f,a,b,n,"left")`

10.1 Somme de Riemann



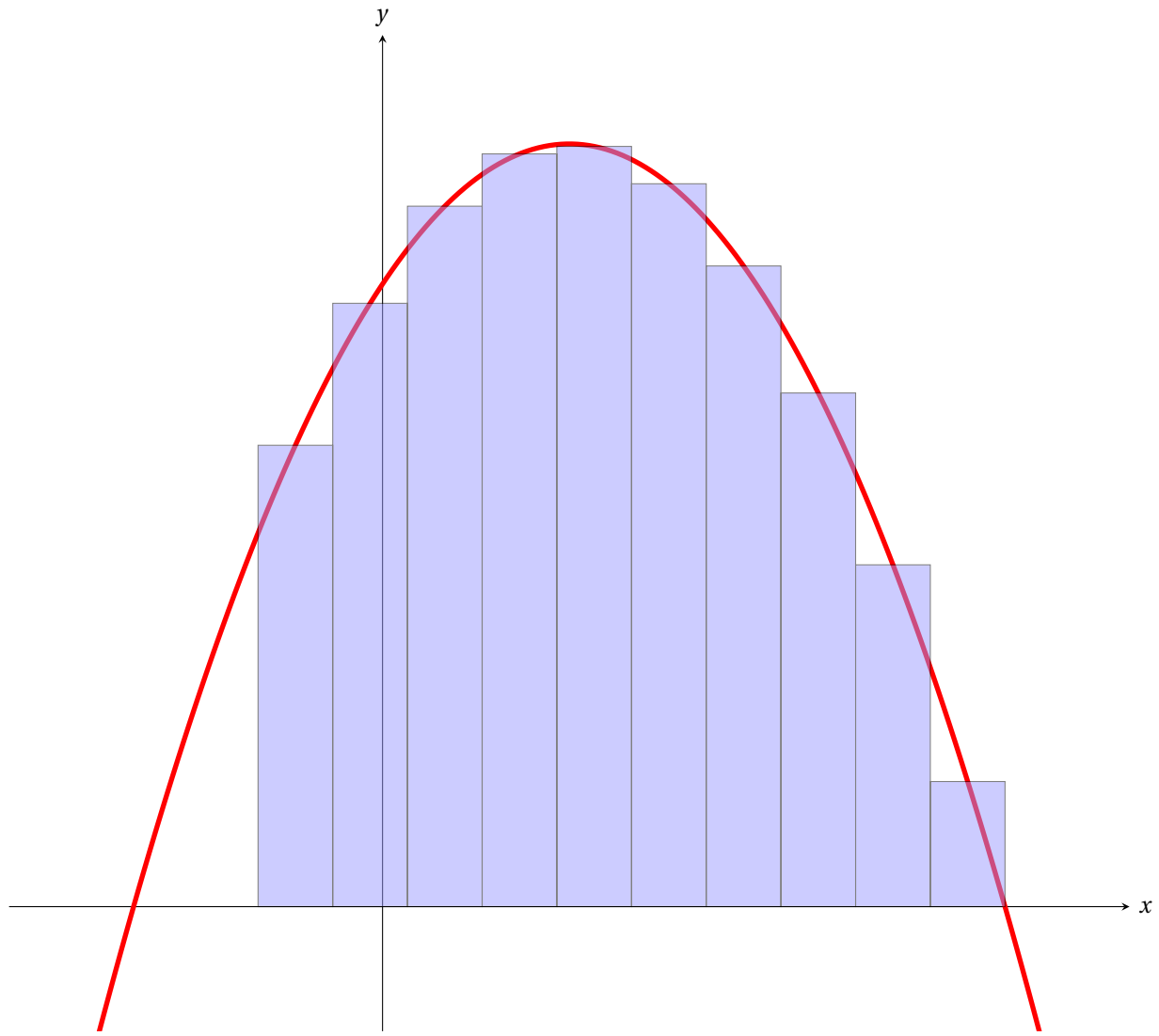

```
\begin{tikzpicture}[scale=3.5]
\tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=0,ymax=1.75]
\tkzFnAxes
\tkzFnGrid(0,0)(3,1.75)
\tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=1/3:3]{0.125*(3*x-1)+0.375*(3*x-1)/(x*x)}
\tkzFnRiemann[fill=green!40,opacity=.2,color=green,
              line width=1pt,interval=1/2:e,number=10](f)
\end{tikzpicture}
```

10.2 Méthodes inf et sup




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.75]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=6,ymin=-2,ymax=14,ystep=2]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnDraw[name=f,line width=2pt,color=red,domain=-3:6]{(-x-2)*(x-5)}
  \tkzFnRiemann[method=sup,fill=blue!40,opacity=.5,interval=-1:5](f)
  \tkzFnRiemann[method=inf,fill=green!40,opacity=.5,interval=-1:5](f)
\end{tikzpicture}
```

10.3 Méthode mid




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.75]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=6,ymin=-2,ymax=14,ystep=2]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnDraw[name=f,line width=2pt,color=red,domain=-3:6]{(-x-2)*(x-5)}
  \tkzFnRiemann[method=mid,fill=blue!40,opacity=.5,interval=-1:5](f)
\end{tikzpicture}
```

10.4 Valeurs des sommes

Pour $f(x) = (-x-2)(x-5)$ sur $[-1\,;\,5]$ avec 10 rectangles :

inf	48,1
mid	54,18
sup	59,18
intégrale	54

```
\tkzFnDef{f}{(-x-2)*(x-5)}
\begin{tabular}{ll}
inf       & \tkzFnPrint{riemann(f,-1,5,10,"inf")}\\
mid       & \tkzFnPrint{riemann(f,-1,5,10,"mid")}\\
sup       & \tkzFnPrint{riemann(f,-1,5,10,"sup")}\\
intégrale & \tkzFnPrint{integral(f,-1,5)}
\end{tabular}
```

11 Droites particulières

11.1 Droites verticales : \tkzFnVLines

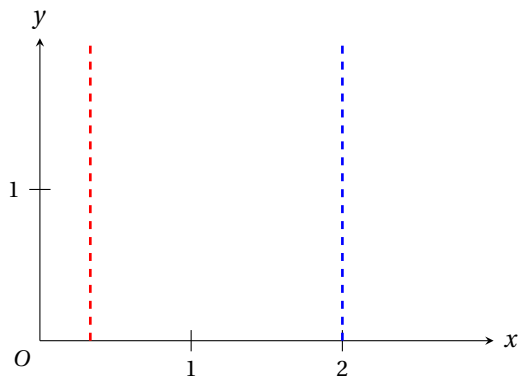
\tkzFnVLines[⟨options de TikZ⟩]{⟨liste⟩}

Trace les droites d'équations $x = a$ pour les valeurs a de la liste. La liste s'écrit comme avec **\foreach** *(1,2,...,4) et ses éléments sont des expressions Lua (1/3, 2*pi). \tkzFnVLine est un synonyme. Le style est* **tkzfn line**.

arguments	exemple	définition
liste	{1,4}	trace les droites $x = 1$ et $x = 4$

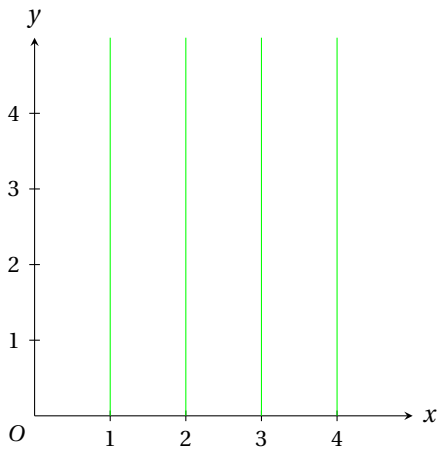
11.2 Ligne verticale

Avec **tkz-fct**, `1./3` posait problème ; avec Lua, `1/3` est correct.



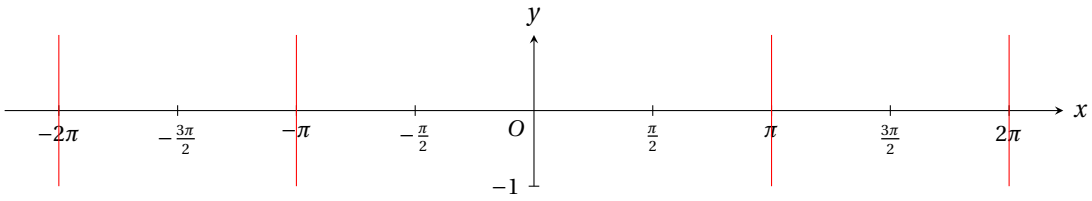

```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
   \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=0,ymax=2]
   \tkzFnAxes
   \tkzFnVLine[color=blue,dashed,
               line width=1pt]{2}
   \tkzFnVLine[color=red,dashed,
               line width=1pt]{1/3}
\end{tikzpicture}
```

11.3 Lignes verticales




```
\begin{tikzpicture}
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=5,ymin=0,ymax=5]
 \tkzFnAxes
 \tkzFnVLines[color=green]{1,2,...,4}
\end{tikzpicture}
```

11.4 Lignes verticales et multiples de pi

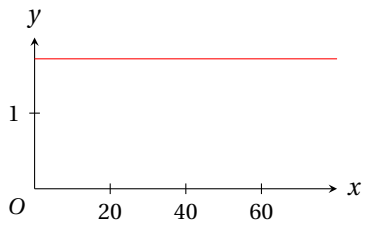



```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=-7,xmax=7,ymin=-1,ymax=1]
  \tkzFnAxisY
  \tkzFnAxisX[trig=2]
  \tkzFnVLines[color=red]{-2*pi,-pi,pi,2*pi}
\end{tikzpicture}
```

11.5 Droites horizontales : \tkzFnHLines

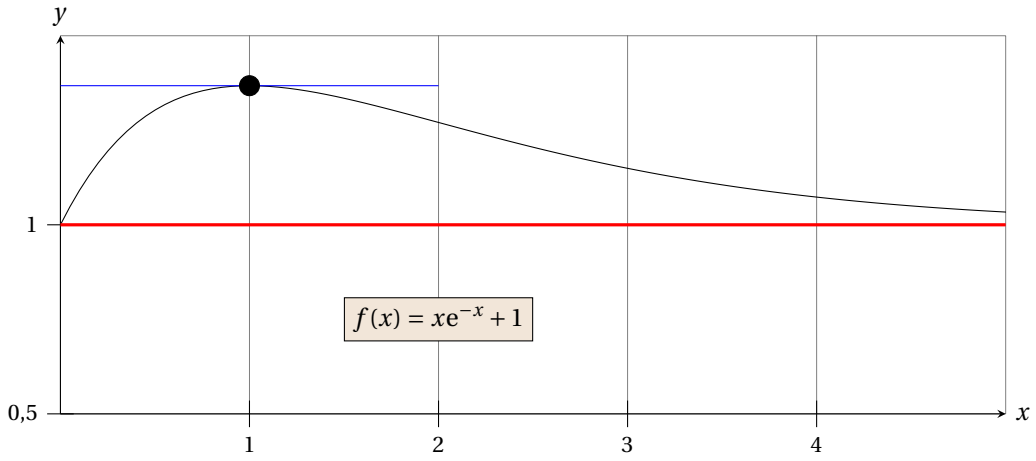
\tkzFnHLines[⟨options de TikZ⟩]{⟨liste⟩}

Trace les droites d'équations $y = b$. ***\tkzFnHLine*** *est un synonyme.*



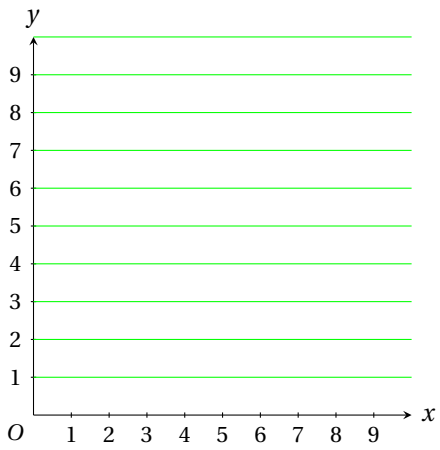

```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=80,xstep=20,
             ymin=0,ymax=2]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnHLine[color=red]{e-1}
\end{tikzpicture}
```

11.6 Asymptote horizontale



```
\begin{tikzpicture}[scale=2.5]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=5,ymin=0.5,ymax=1.5,ystep=0.5]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[name=f,domain=0:10]{x*exp(-x)+1}
  \tkzFnHLine[color=red,line width=1.2pt]{1}
  \tkzFnTangent[draw,color=blue](f,1)
  \tkzFnText[draw,fill=brown!20](2,0.75){$f(x)=x \text{e}^{-x}+1$}
\end{tikzpicture}
```

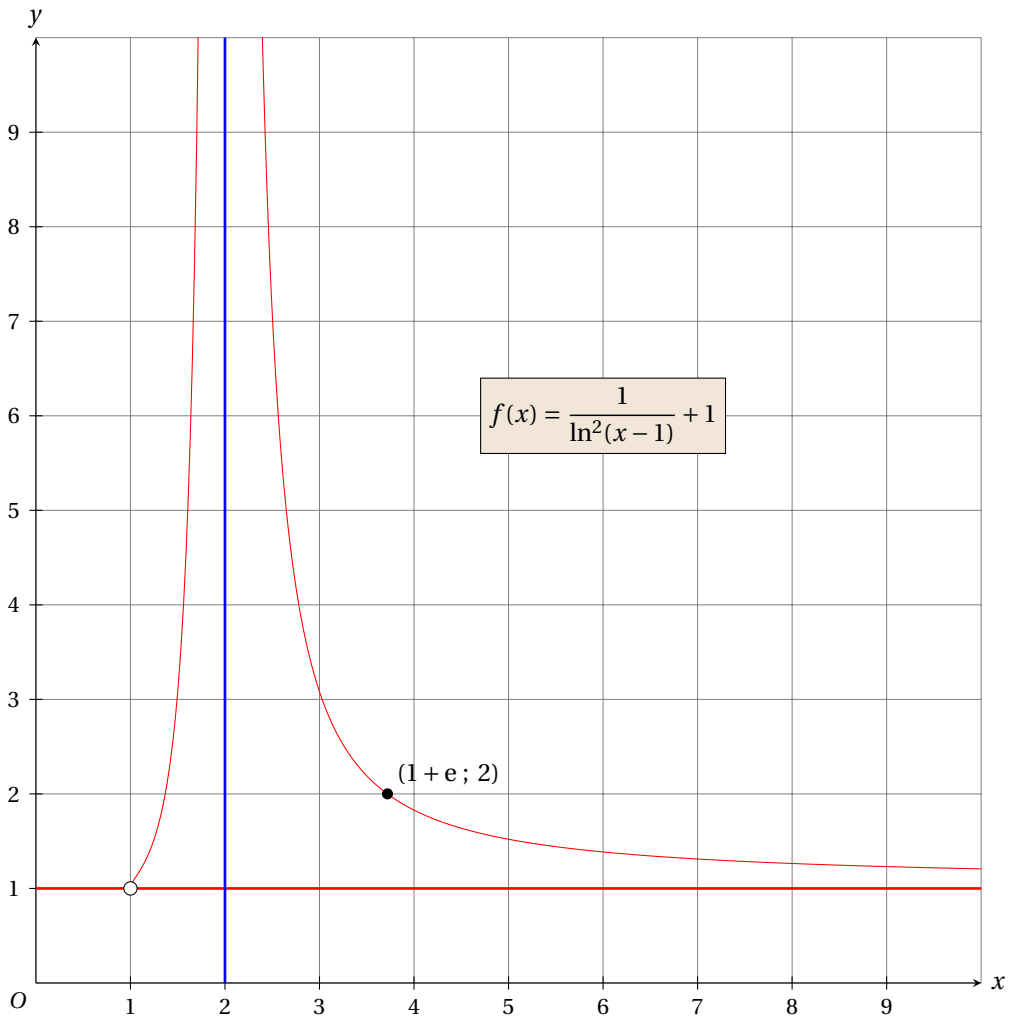
11.7 Lignes horizontales




```
\begin{tikzpicture}[scale=.5]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=10,ymin=0,ymax=10]
 \tkzFnAxes
 \tkzFnHLines[color=green]{1,2,...,10}
\end{tikzpicture}
```

11.8 Asymptotes horizontale et verticale

La courbe est automatiquement interrompue en $x = 2$: il n'est plus nécessaire de la tracer en deux parties.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=10,ymin=0,ymax=10]
 \tkzFnGrid
 \tkzFnAxes
 \tkzFnDraw[name=f,color=red,samples=400,domain=1.001:10]{1+1/ln(x-1)^2}
 \tkzFnHLine[line width=1pt,color=red]{1}
 \tkzFnVLine[line width=1pt,color=blue]{2}
 \tkzFnDefPointXY(1,1){A}
 \tkzFnDrawPoints[fill=white,draw=Maroon,size=2pt](A)
 \tkzFnDefPoint[draw](f,{1+e}){B}
 \tkzFnLabelPoint[above right](B){$(1+\text{e}~;~2)$}
 \tkzFnText[draw,color=black,fill=brown!20](6,6)
          {$f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 (x-1)}+1$}
\end{tikzpicture}
```

12 Courbes paramétrées

`\tkzFnParam[⟨options⟩]{⟨x(t)⟩}{⟨y(t)⟩}`

x(t) et y(t) sont des expressions Lua de la variable `t`.

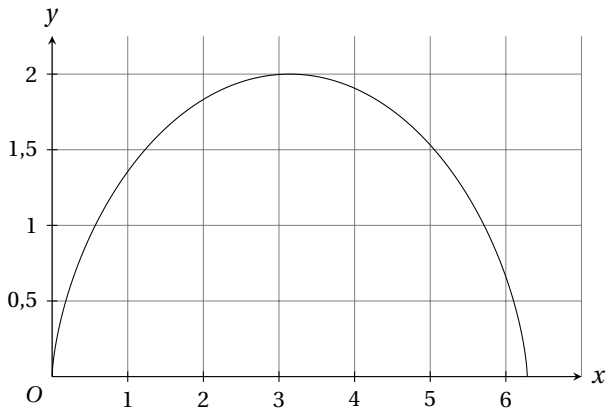
arguments	exemple	explication
`x(t),y(t)`	`{t^3}{t^2}`	$x(t)=t^3,\ y(t)=t^2$

options	défaut	définition
`domain`	`0:2*pi`	`intervalle des valeurs de` t
`samples`	`200`	`nombre de points`
`clip`	`false`	`la courbe est découpée à la fenêtre`

Les autres options sont celles de TikZ.

12.1 Courbe paramétrée exemple 1

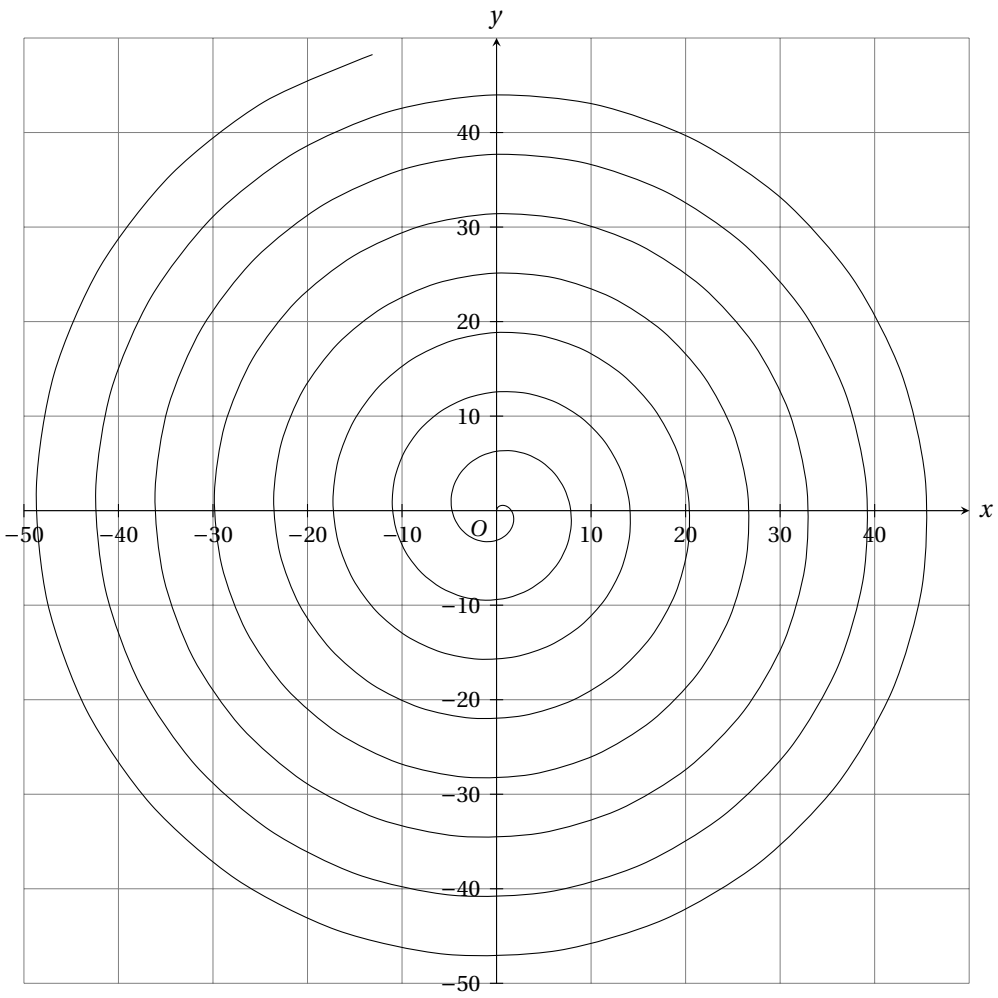
$$x(t) = t - \sin(t)$$
$$y(t) = 1 - \cos(t)$$




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=7,ymin=0,ymax=2.25,ystep=.5]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnParam[samples=400,domain=0:2*pi]{t-sin(t)}{1-cos(t)}
\end{tikzpicture}
```

12.2 Courbe paramétrée exemple 2

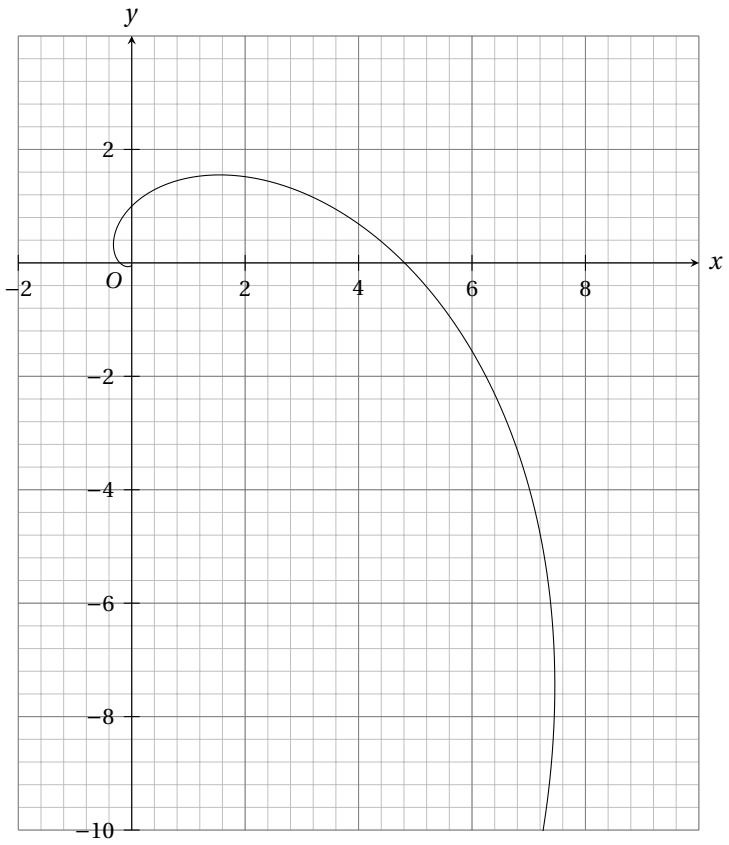
$$x(t) = t \times \sin(t)$$
$$y(t) = t \times \cos(t)$$




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
  \tkzFnInit[xmin=-50,xmax=50,xstep=10,
             ymin=-50,ymax=50,ystep=10]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnParam[smooth,samples=200,domain=0:50]{t*sin(t)}{t*cos(t)}
\end{tikzpicture}
```

12.3 Courbe paramétrée exemple 3

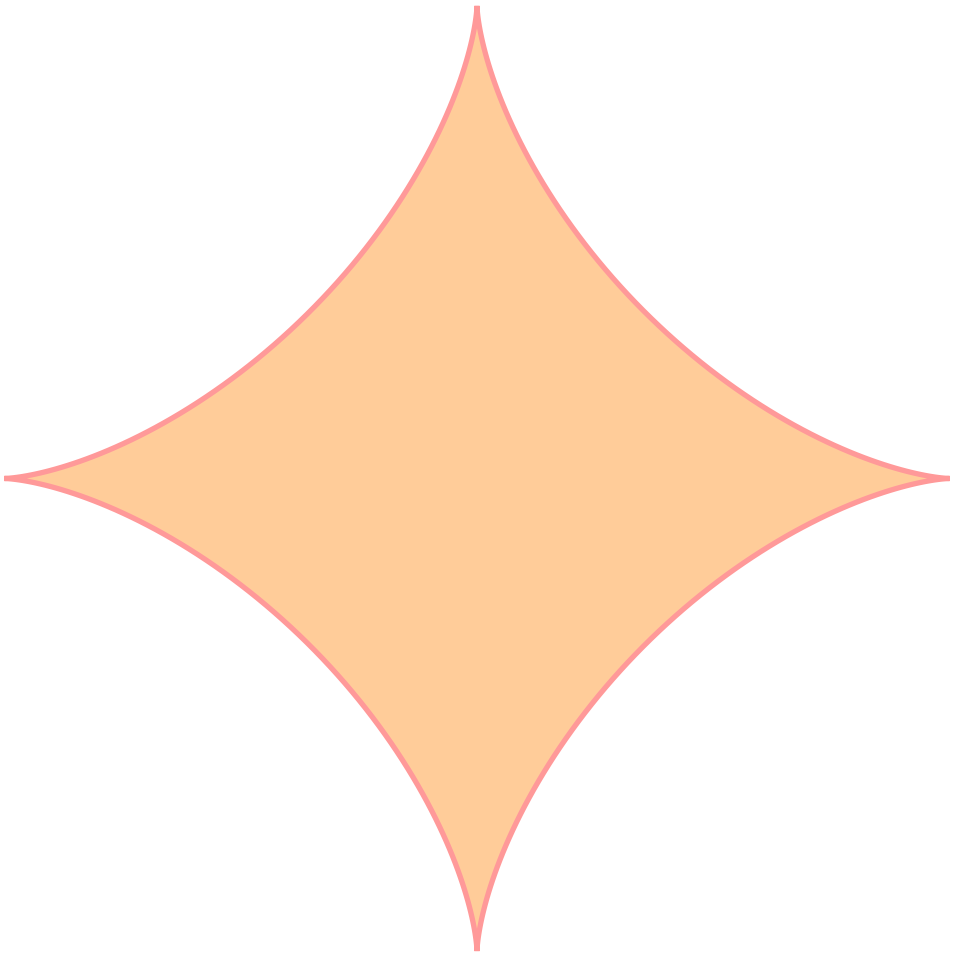
$$x(t) = \exp(t) \times \sin(t)$$
$$y(t) = \exp(t) \times \cos(t)$$




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=10,xstep=2,ymin=-10,ymax=4,ystep=2]
  \tkzFnGrid[sub]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnParam[clip,samples=400,domain=-pi:pi]{exp(t)*sin(t)}{exp(t)*cos(t)}
\end{tikzpicture}
```

12.4 Courbe paramétrée exemple 4

$$x(t) = \cos^3(t)$$
$$y(t) = \sin^3(t)$$



```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
  \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=1,xstep=.2,
             ymin=-1,ymax=1,ystep=.2]
  \tkzFnParam[color=red,line width=2pt,fill=orange,opacity=.4,
              samples=400,domain=0:2*pi]{cos(t)^3}{sin(t)^3}
\end{tikzpicture}
```

12.5 Courbe paramétrée exemple 5

Saint Valentin version 1

$$x(t) = \sin^3(t)$$
$$y(t) = \cos(t) - \cos^4(t)$$



```
\begin{tikzpicture}[scale=4]
  \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=1,ymin=-2,ymax=1]
  \tkzFnParam[samples=500,smooth,domain=-pi:pi,
              ball color=red,shading=ball]{sin(t)^3}{cos(t)-cos(t)^4}
\end{tikzpicture}
```

12.6 Courbe paramétrée exemple 6

Saint Valentin version 2 from http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html

$$x(t) = \sin(t)\cos(t)\ln(|t|)$$
$$y(t) = \sqrt{|t|}\cos(t)$$



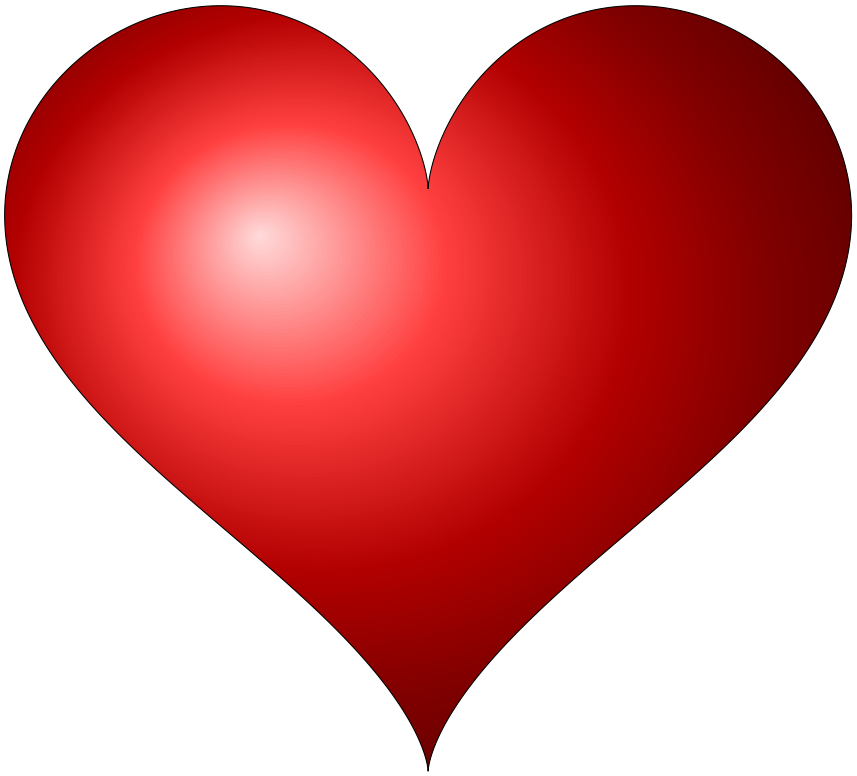
```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
   \tkzFnInit[xmin=-.4,xmax=.4,xstep=.1,ymin=0,ymax=.7,ystep=.1]
   \tkzFnParam[samples=2000,smooth,domain=-1:1,
               ball color=red,shading=ball]
   {sin(t)*cos(t)*ln(abs(t))}{sqrt(abs(t))*cos(t)}
\end{tikzpicture}
```

☞ En $t = 0$, $\ln|t|$ n'est pas défini : Lua ignore ce point.

12.7 Courbe paramétrée exemple 7

Saint Valentin version 3 from http://en.wikipedia.org/wiki/Heart_(symbol)

$$x(t) = 16\sin^3(t)$$
$$y(t) = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t)$$



```
\begin{tikzpicture}[scale=1.75]
  \tkzFnInit[xmin=-20,xmax=20,xstep=5,ymin=-25,ymax=15,ystep=5]
  \tkzFnParam[samples=400,smooth,domain=0:2*pi,
              ball color=red,shading=ball]
   {16*sin(t)^3}{13*cos(t)-5*cos(2*t)-2*cos(3*t)-cos(4*t)}
\end{tikzpicture}
```

13 Courbes en coordonnées polaires

`\tkzFnPolar[⟨options⟩]{⟨ρ(t)⟩}`

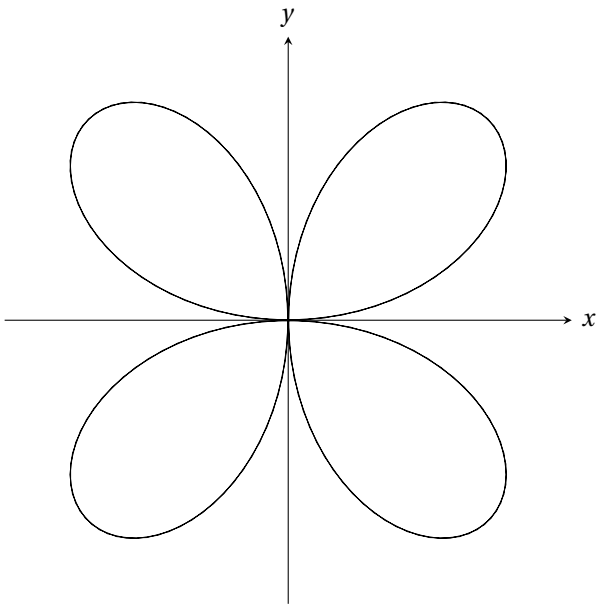
ρ(t) est une expression Lua de la variable `t` *; le point tracé a pour coordonnées* $(\rho(t)\cos t\ ;\ \rho(t)\sin t)$. *Les bornes du domaine sont des expressions Lua :* `pi` *représente* π.

options	défaut	définition
`domain`	`0:2*pi`	`intervalle des valeurs de` t
`samples`	`200`	`nombre de points`
`clip`	`false`	`la courbe est découpée à la fenêtre`

Les autres options sont celles de TikZ.

13.1 Équation polaire exemple 1

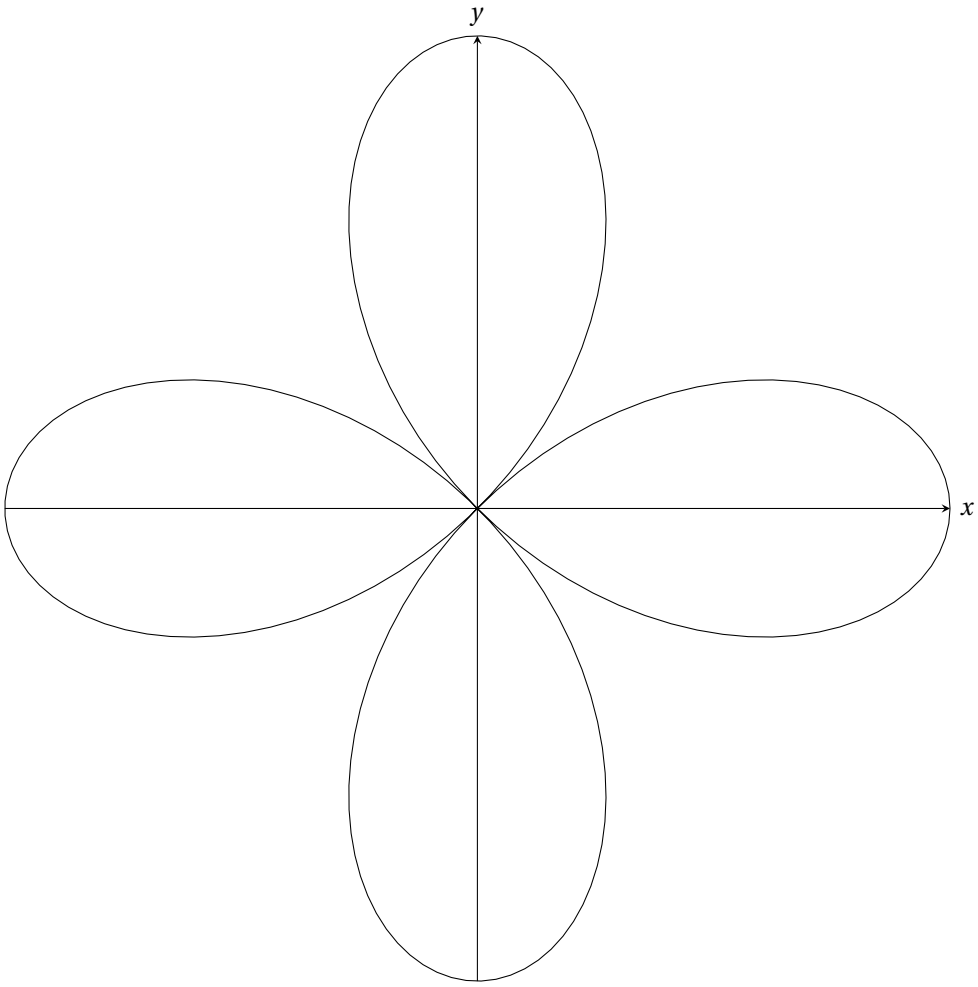
$\rho(t) = \cos(t)\sin(t)$




```
\begin{tikzpicture}[scale=0.75]
 \tkzFnInit[xmin=-0.5,xmax=0.5,
            ymin=-0.5,ymax=0.5,
            xstep=0.1,ystep=.1]
 \tkzFnAxes[ticks=false]
 \tkzFnPolar[domain=-2*pi:2*pi]{cos(t)*sin(t)}
\end{tikzpicture}
```

13.2 Équation polaire exemple 2

$\rho(t) = \cos(2t)$




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
   \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=1,
              ymin=-1,ymax=1,
              xstep=.2,ystep=.2]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnPolar[domain=0:2*pi]{cos(2*t)}
\end{tikzpicture}
```

13.3 Équation polaire : cœur

From Mathworld : http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html

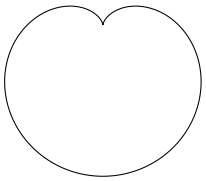
$$\rho(t) = 2 - 2\sin(t) + \sin(t)\frac{\sqrt{|\cos(t)|}}{\sin(t) + 1.4}$$



```
\begin{tikzpicture}[scale=.6]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5]
  \tkzFnPolar[domain=-pi:pi,
              samples=800,
              ball color=red,
              shading=ball]
    {2-2*sin(t)+sin(t)*sqrt(abs(cos(t)))/(sin(t)+1.4)}
\end{tikzpicture}
```

13.4 Équation polaire exemple 4

$$\rho(t) = 1 - \sin(t)$$

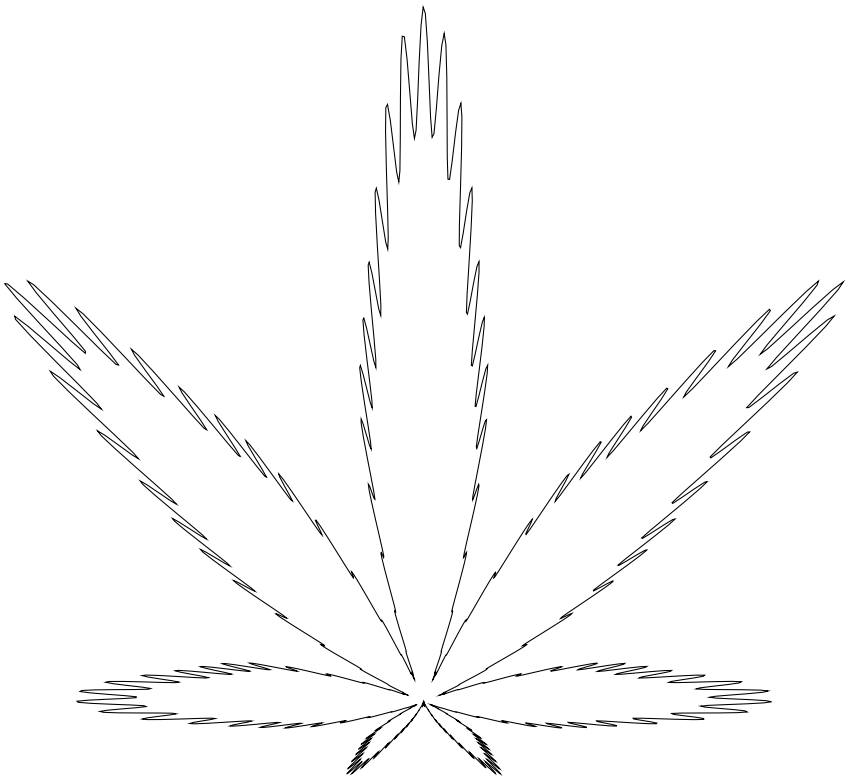


```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
 \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5]
 \tkzFnPolar[domain=0:2*pi,samples=400]{1-sin(t)}
\end{tikzpicture}
```

13.5 Équation polaire : Cannabis curve

Cannabis curve from mathworld : http://mathworld.wolfram.com/CannabisCurve.html

$\rho(t) = (1 + 0.9\cos(8t))(1 + 0.1\cos(24t))(1 + 0.1\cos(200t))(1 + \sin(t))$

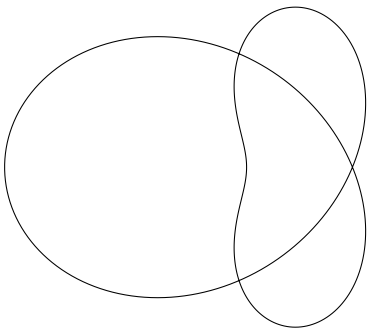


```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5]
  \tkzFnPolar[domain=0:2*pi,samples=2000]
  {(1+.9*cos(8*t))*(1+.1*cos(24*t))*(1+.1*cos(200*t))*(1+sin(t))}
\end{tikzpicture}
```

13.6 Scarabaeus curve

From mathworld : http://mathworld.wolfram.com/Scarabaeus.html

$\rho(t) = 1.6\cos(2t) - 3\cos(t)$



```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
  \tkzFnInit[xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5]
  \tkzFnPolar[domain=0:2*pi,samples=400]{1.6*cos(2*t)-
3*cos(t)}
\end{tikzpicture}
```

14 Courbes définies implicitement

Une courbe implicite est l'ensemble des points $(x\ ;\ y)$ qui vérifient une équation $F(x,y) = 0$: cercle, ellipse, hyperbole, lemniscate, folium de Descartes, etc. Il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation : Lua calcule F aux nœuds d'une grille qui recouvre la fenêtre et repère les cases où F change de signe (méthode des *marching squares*). Chaque point de passage est ensuite calculé avec précision par dichotomie, et les morceaux sont reliés en chemins continus.

`\tkzFnImplicit[⟨options⟩]{⟨F(x,y)⟩}`

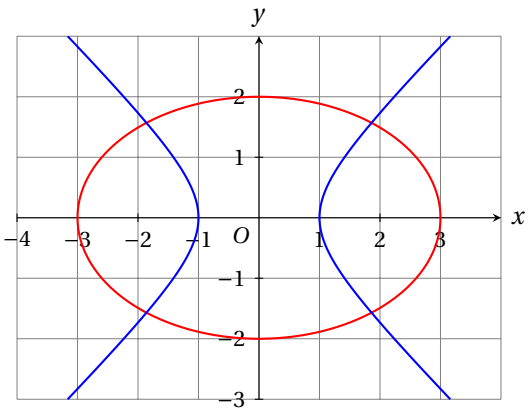
$F(x,y)$ est une expression Lua des variables `x` et `y`. On peut aussi écrire une équation : `{x^2 + y^2 = 4}` est équivalent à `{(x^2 + y^2)-(4)}`. La courbe est tracée dans la fenêtre définie par `\tkzFnInit`.

options	défaut	définition
`level`	`0`	`valeur(s) c : courbes` $F(x,y)=c$
`samples`	`100`	`nombre de cases sur le plus grand côté`
`domain`	`xmin:xmax`	`intervalle des valeurs de` x
`ydomain`	`ymin:ymax`	`intervalle des valeurs de` y
`refine`	`true`	`dichotomie sur chaque arête de la grille`
`clip`	`true`	`la courbe est découpée à la fenêtre`

Les autres options sont celles de TikZ. `level` accepte une liste comme `\foreach` : `level={-2,-1,...,2}`.

14.1 Coniques

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ et $x^2 - y^2 = 1$

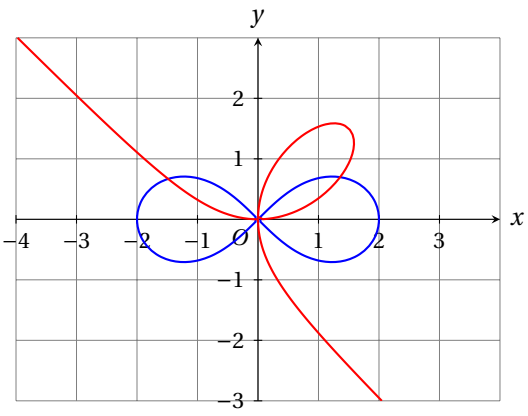



```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-4,xmax=4,ymin=-3,ymax=3]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnImplicit[thick,red]{x^2/9 + y^2/4 = 1}
  \tkzFnImplicit[thick,blue]{x^2 - y^2 = 1}
\end{tikzpicture}
```

14.2 Lemniscate de Bernoulli et folium de Descartes

$(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$ et $x^3 + y^3 = 3xy$

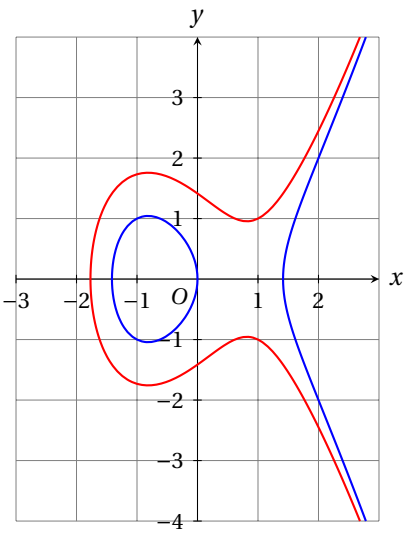
Les points doubles, en O, sont correctement traités.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-4,xmax=4,ymin=-3,ymax=3]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnImplicit[thick,blue]
    {(x^2+y^2)^2 = 4*(x^2-y^2)}
  \tkzFnImplicit[thick,red]{x^3 + y^3 = 3*x*y}
\end{tikzpicture}
```

14.3 Une courbe elliptique

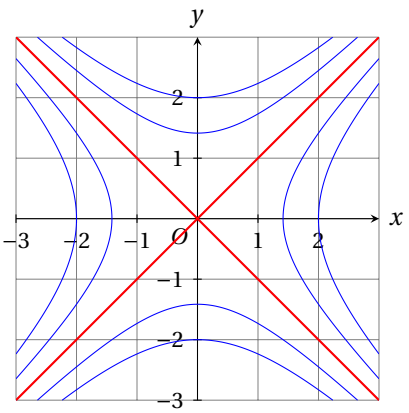
$y^2 = x^3 - 2x + 2$: la courbe a une seule composante ; avec $y^2 = x^3 - 2x$, elle en a deux.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-4,ymax=4]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnImplicit[thick,red]{y^2 = x^3 - 2*x + 2}
  \tkzFnImplicit[thick,blue]{y^2 = x^3 - 2*x}
\end{tikzpicture}
```

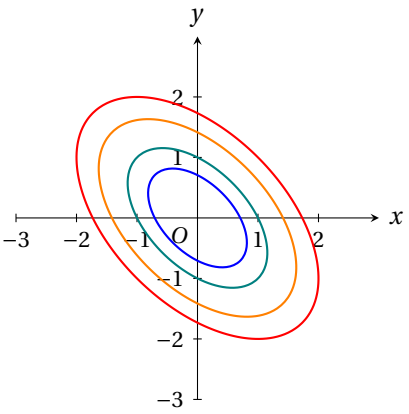
14.4 Courbes de niveau

L'option `level` trace les courbes $F(x,y) = c$ pour plusieurs valeurs de c. Ici les courbes de niveau de $F(x,y) = x^2 - y^2$: la courbe de niveau 0 est formée des deux droites $y = x$ et $y = -x$.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-3,ymax=3]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnImplicit[level={-4,-2,...,4},blue]
    {x^2 - y^2}
  \tkzFnImplicit[thick,red]{x^2 - y^2}
\end{tikzpicture}
```

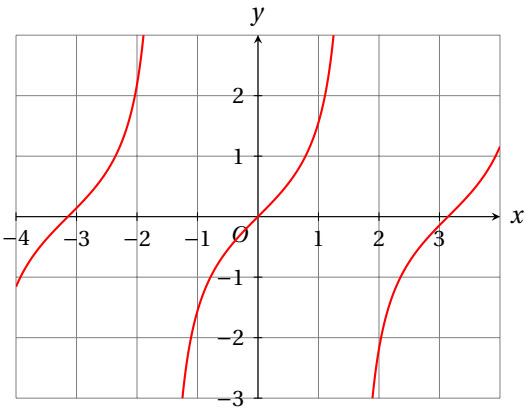
Avec une boucle `\foreach`, chaque niveau peut avoir sa couleur.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-3,ymax=3]
  \tkzFnAxes
  \foreach \c/\col in {0.5/blue,1/teal,
                       2/orange,3/red}
    {\tkzFnImplicit[level=\c,thick,\col]
       {x^2 + x*y + y^2}}
\end{tikzpicture}
```

14.5 Fonction discontinue

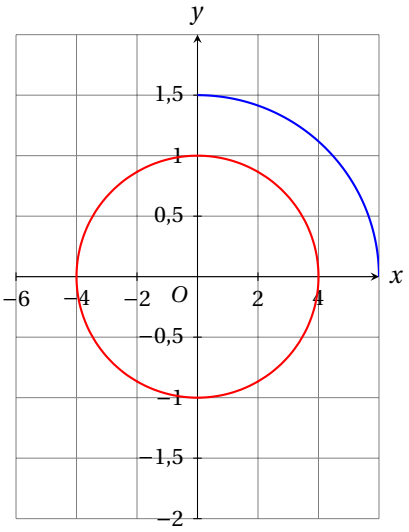
Pour $y = \tan(x)$, $F(x,y) = y - \tan(x)$ change de signe de part et d'autre des asymptotes sans s'annuler : ces faux passages sont détectés et éliminés.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-4,xmax=4,ymin=-3,ymax=3]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnImplicit[thick,red]{y = tan(x)}
\end{tikzpicture}
```

14.6 Fenêtre, unités et lissage

La grille est faite de cases carrées dans la page, même si **xstep** et **ystep** sont différents. Les options **domain** et **ydomain** limitent le tracé à une partie de la fenêtre. Avec **smooth**, les courbes fermées sont tracées avec `smooth cycle`.



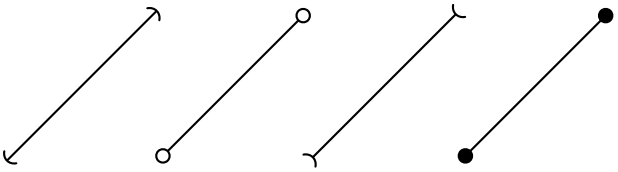

```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=-6,xmax=6,xstep=2,ymin=-2,ymax=2,ystep=.5]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnImplicit[thick,red,smooth,samples=600]{x^2/16 + y^2 = 1}
  \tkzFnImplicit[thick,blue,domain=0:6,ydomain=0:2]{x^2/16 + y^2 = 1.5^2}
\end{tikzpicture}
```

14.7 Limites de la méthode

— Une courbe le long de laquelle F ne change pas de signe n'est pas détectée : $(x-y)^2 = 0$ ne donne rien, il faut écrire $x - y = 0$.
— Un détail plus petit qu'une case de la grille peut être manqué : augmenter **samples** (par exemple `samples=2000`).
— Près d'un point singulier, le tracé est exact à la taille d'une case près.

15 Symboles

Certains ajoutent aux courbes des symboles afin de donner des indications supplémentaires au lecteur. Voici quelques exemples possibles (bibliothèque **arrows** de Ti*k*Z) :

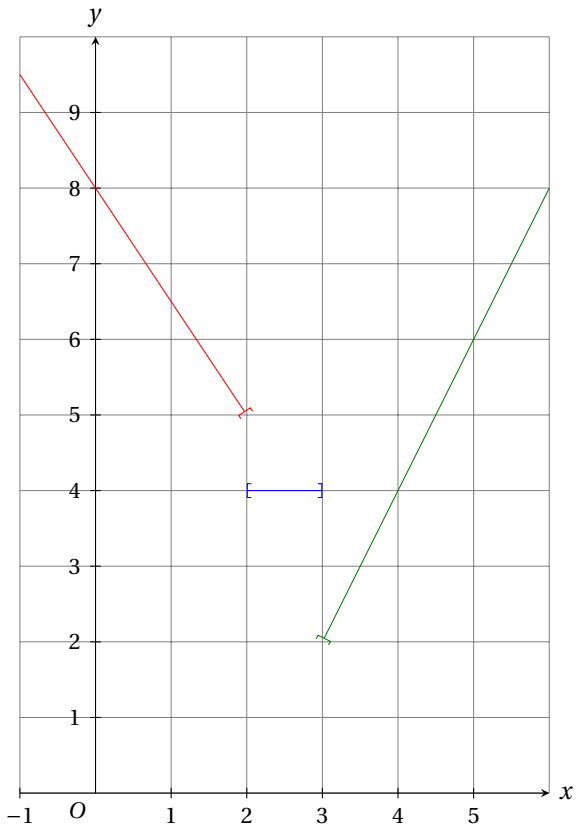


L'exemple suivant est de **Simon Schläpfer** :

On veut tracer

$$y = \begin{cases} 8 - 1.5x & \text{, if } x < 2 \\ 4 & \text{, if } 2 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{, if } x > 3 \end{cases}$$

Les courbes ne doivent pas être découpées à la fenêtre (**clip=false**), sinon les symboles placés aux extrémités seraient coupés.




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=6,ymin=0,ymax=10]
  \tkzFnGrid[color=gray]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[{-[},clip=false,color=red,domain=-1:2,samples=2]{8-1.5*x}
  \tkzFnDraw[{[-]},clip=false,color=blue,domain=2:3,samples=2]{4}
  \tkzFnDraw[{]-},clip=false,color=green!50!black,domain=3:6,samples=2]{2*x-4}
\end{tikzpicture}
```

16 Présentation des résultats : forme française ou américaine

Les nombres écrits par **tkz-fn** (graduations des axes, coordonnées, résultats de calculs) sont présentés selon l'une des deux formes suivantes :

	forme française (fr)	forme américaine (us)
séparateur décimal	3,14	3.14
séparateur des milliers	12 345 (espace fine)	12,345
intervalles	$]a\,;b[$, $[a\,;b]$	(a, b), $[a, b]$
coordonnées	$A(2\,;3)$	$A(2, 3)$
origine du repère	O	0

Les milliers ne sont séparés qu'à partir de cinq chiffres : 1234 mais 12 345.

16.1 Choix de la forme

— Par défaut, la forme est française si la langue de **babel** est le français au début du document, américaine sinon.
— Les options du package imposent la forme : `\usepackage[fr]{tkz-fn}` ou `\usepackage[us]{tkz-fn}`.
— Dans le document : `\tkzFnSetup{format=us}`.

\tkzFnSetup{⟨options⟩}

options	défaut	définition
format	fr ou us	forme des nombres
decimals	2	nombre maximum de décimales de **\tkzFnPrint**
axes	school	présentation des axes : school ou box
arrows	end	flèches des axes : end, both ou none

16.2 Écrire un résultat : \tkzFnPrint

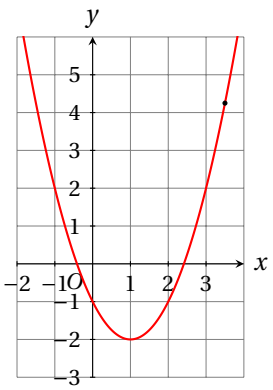
\tkzFnPrint[⟨décimales⟩]{⟨expression Lua⟩}

Calcule l'expression et écrit le résultat arrondi, sans zéros inutiles. Les fonctions définies par **\tkzFnDef** *sont utilisables, ainsi que* `diff(f,x)`, `integral(f,a,b)` *et* `riemann(f,a,b,n,"left")`.

\tkzFnPrintInterval[⟨oo, cc, oc ou co⟩]{⟨a⟩}{⟨b⟩}

Écrit un intervalle ; o = ouvert, c = fermé. Les bornes sont des expressions Lua ou du texte TEX (`-\infty`*).*

16.3 Exemple



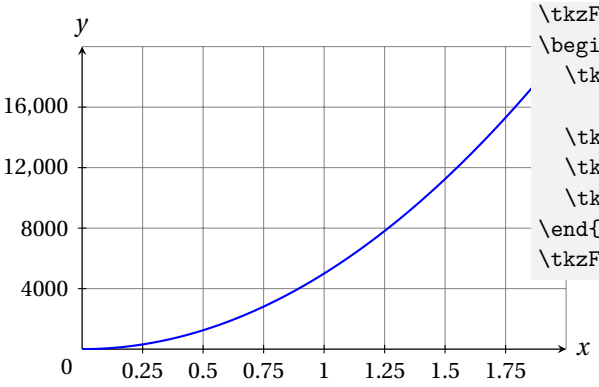
$A(3{,}5\,;4{,}25)$, $f'(3) = 4$, $-1{,}4375$, $1\,234\,567{,}89$, $I =]-\infty\,;2{,}5]$
$A(3.5, 4.25)$, $f'(3) = 4$, -1.4375, $1{,}234{,}567.89$, $I = (-\infty, 2.5]$

```
\tkzFnDef{f}{x^2-2*x-1}
\begin{tikzpicture}[scale=.5]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=4,
             ymin=-3,ymax=6]
  \tkzFnGrid \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[thick,red](f)
  \tkzFnDefPoint[draw](f,3.5){A}
\end{tikzpicture}

$A\tkzFnPrintCoord(A)$,
$f'(3)=\tkzFnPrint{diff(f,3)}$,
$\tkzFnPrint[4]{f(0.25)}$,
$\tkzFnPrint{1234567.891}$,
$I=\tkzFnPrintInterval[oc]{-\infty}{2.5}$

\tkzFnSetup{format=us}
$A\tkzFnPrintCoord(A)$,
$f'(3)=\tkzFnPrint{diff(f,3)}$,
$\tkzFnPrint[4]{f(0.25)}$,
$\tkzFnPrint{1234567.891}$,
$I=\tkzFnPrintInterval[oc]{-\infty}{2.5}$
\tkzFnSetup{format=fr}
```

16.4 Graduations en forme américaine




```
\tkzFnSetup{format=us}
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=2,xstep=.25,
             ymin=0,ymax=20000,ystep=4000]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[blue,thick]{5000*x^2}
\end{tikzpicture}
\tkzFnSetup{format=fr}
```

17 Avec tkz-elements

tkz-elements travaille en centimètres, **tkz-fn** dans les unités du repère. Lorsque **tkz-elements** est chargé, chaque point défini par `\tkzFnDefPoint` ou `\tkzFnDefPointXY` est aussi rangé dans la table z, avec ses coordonnées en centimètres :

$$\texttt{z.A} = \left(\frac{x_A}{\text{xstep}} ; \frac{y_A}{\text{ystep}}\right)$$

On peut ensuite utiliser ce point avec les objets de **tkz-elements** : `circle(z.O, z.A)`, `line(z.A, z.B)`, etc. Dans l'autre sens, `tkzfn.point_from_z("B")` ramène le point `z.B` dans le repère, ce qui permet d'écrire ses coordonnées avec `\tkzFnPrintCoord`.

Dans un repère qui n'est pas orthonormé, `circle(z.O, z.A)` est un cercle de la page et non un cercle du repère.

tkz-elements n'est pas chargé par **tkz-fn** ; l'exemple suivant demande `\usepackage{tkz-elements}`.

```
\tkzFnDef{f}{x^2/2}
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-2,ymax=6,ystep=2]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[thick,red](f)
  \tkzFnDefPoint(f,2){A}       % A(2;2) dans le repère, z.A = (2,1) en cm
  \tkzFnDefPointXY(0,0){O}
  \directlua{
    C.OA = circle(z.O, z.A)     % tkz-elements travaille en cm
    z.B  = C.OA.south
  }
  \tkzGetNodes
  \draw[blue] (O) circle [radius=\tkzUseLua{C.OA.radius}];
  \tkzFnDrawPoints[red](A,O)
  \fill[blue] (B) circle (1.5pt) node[below right] {$B$};
\end{tikzpicture}

\directlua{tkzfn.point_from_z("B")}
$B\tkzFnPrintCoord(B)$   % (0 ; -4,47) dans le repère
```

17.1 En Lua

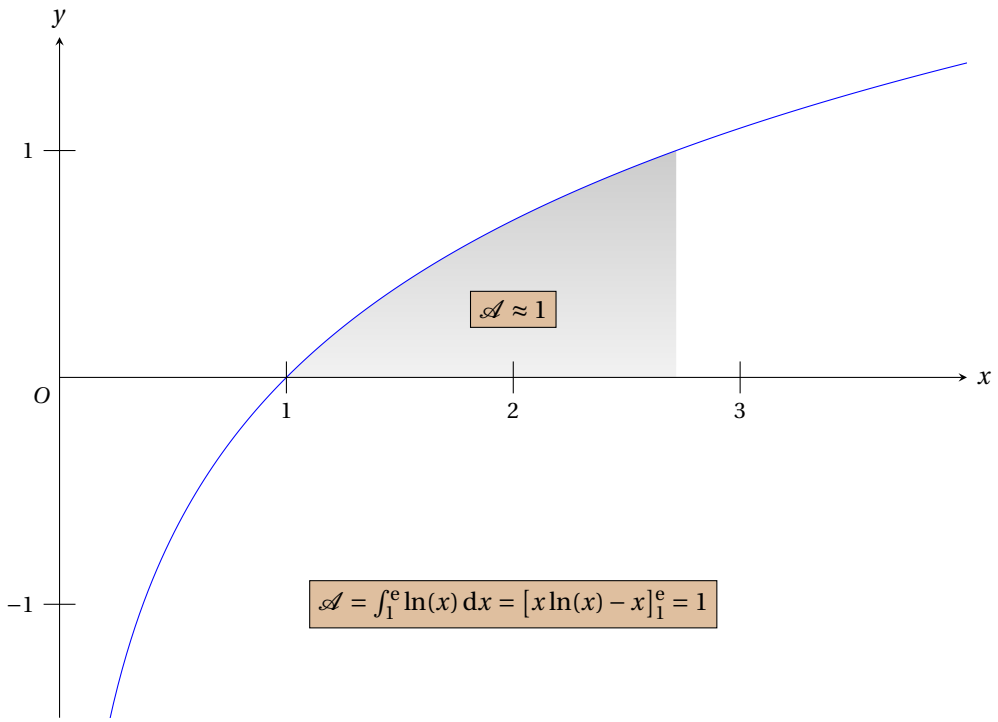
Les objets de **tkz-fn** sont accessibles en Lua :

- `FN.f(2)` : image de 2 par la fonction f ;
- `tkzfn.fct("sin(x)")` : crée une fonction (`FN.g = tkzfn.fct("sin(x)")`), on peut aussi donner une fonction Lua ;
- `tkzfn.derivative(f, x)`, `tkzfn.integral(f, a, b)` ;
- `tkzfn.to_page(x, y)` et `tkzfn.to_user(X, Y)` : conversions entre le repère et la page ;
- `tkzfn.points.A` : coordonnées de A dans le repère.

18 Quelques exemples

18.1 TikZ et tkz-fn

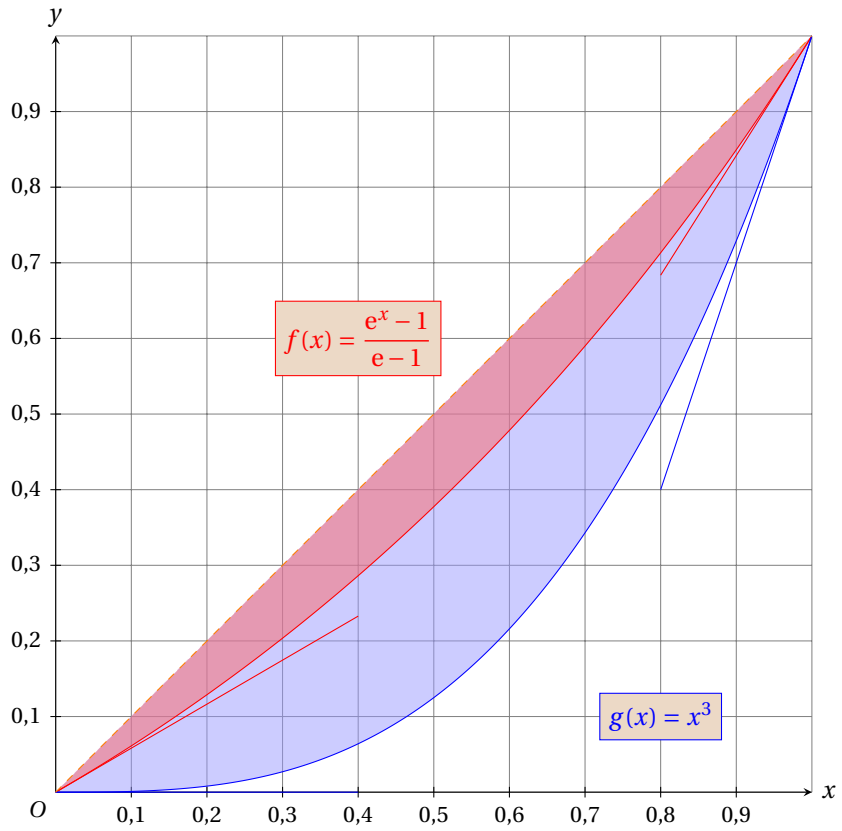
Les codes de Ti*k*Z et de **tkz-fn** peuvent se compléter. Ici, la surface est remplie avec un dégradé de Ti*k*Z ; la valeur de l'intégrale est calculée par Lua.




```
\begin{tikzpicture}[scale=3]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=4,ymin=-1.5,ymax=1.5]
  \tkzFnAxisY
  \tkzFnDef{f}{ln(x)}
  \tkzFnArea[fill=none,top color=gray!80,bottom color=gray!20,
             domain=1:e](f)
  \tkzFnDraw[color=blue,domain=0.2:4](f)
  \tkzFnAxisX
  \tkzFnText[draw,color=black,fill=brown!50](2,-1)
    {$\mathcal{A} = \int_1^{\text{e}}\ln(x)\,\text{d}x =
     \big[x\ln(x)-x\big]_{1}^{\text{e}} = 1$}
  \tkzFnText[draw,color=black,fill=brown!50](2,0.3)
    {$\mathcal{A}\approx\tkzFnPrint[6]{integral(f,1,e)}$}
\end{tikzpicture}
```

18.2 Courbes de Lorentz

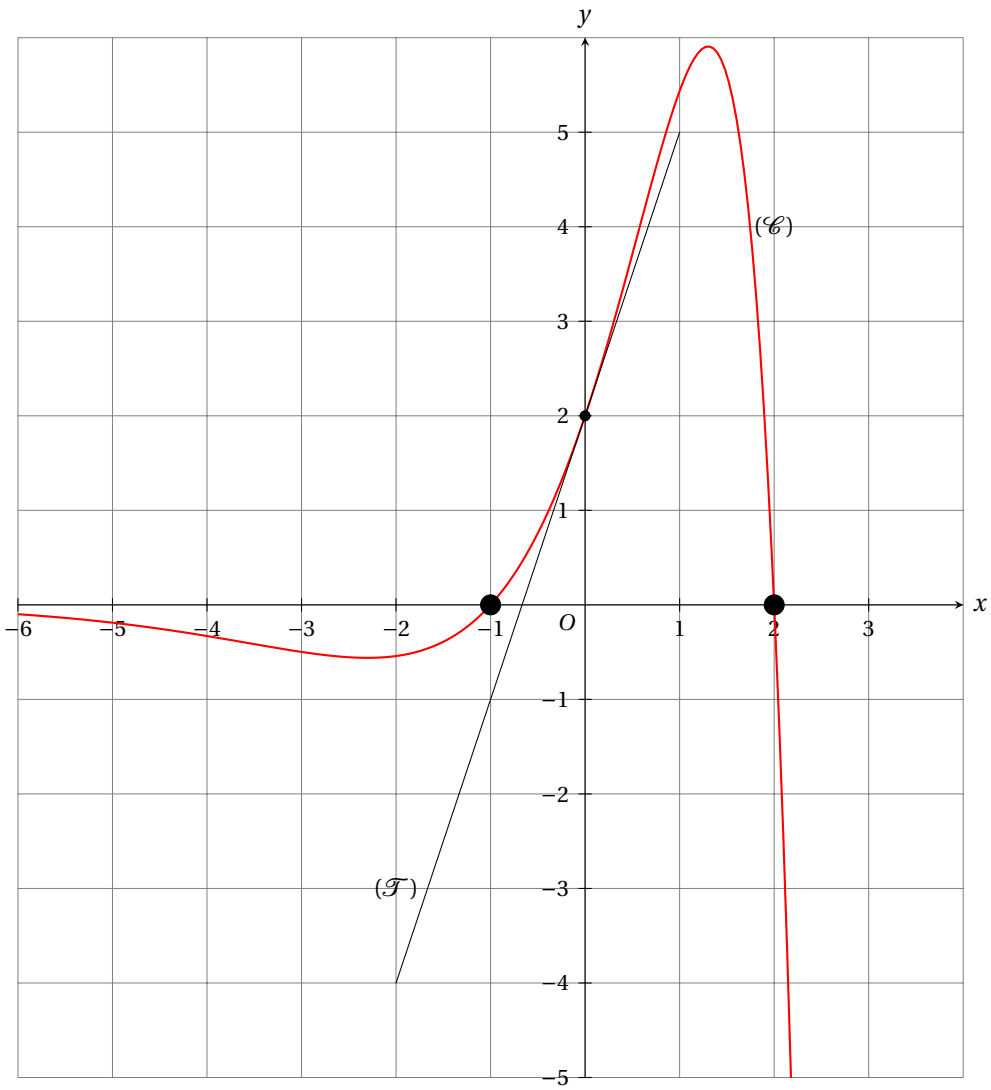
$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$ et $g(x) = x^3$




```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=1,ymin=0,ymax=1,xstep=0.1,ystep=0.1]
  \tkzFnGrid(0,0)(1,1)
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDef{f}{(exp(x)-1)/(exp(1)-1)}
  \tkzFnDef{g}{x^3}
  \tkzFnDef{h}{x}
  \tkzFnArea[fill=blue!40,domain=0:1](h,g)
  \tkzFnArea[fill=red!60,domain=0:1](h,f)
  \tkzFnDraw[color=red](f)
  \tkzFnTangent[kl=0,kr=0.4,color=red](f,0)
  \tkzFnTangent[kl=0.2,kr=0,color=red](f,1)
  \tkzFnText[draw,color=red,fill=brown!30](0.4,0.6)
          {$f(x)=\dfrac{\text{e}^x-1}{\text{e}-1}$}
  \tkzFnDraw[color=blue](g)
  \tkzFnTangent[kl=0,kr=0.4,color=blue](g,0)
  \tkzFnTangent[kl=0.2,kr=0,color=blue](g,1)
  \tkzFnText[draw,color=blue,fill=brown!30](0.8,0.1){$g(x)=x^3$}
  \tkzFnDraw[color=orange,dashed](h)
\end{tikzpicture}
```

18.3 Courbe exponentielle

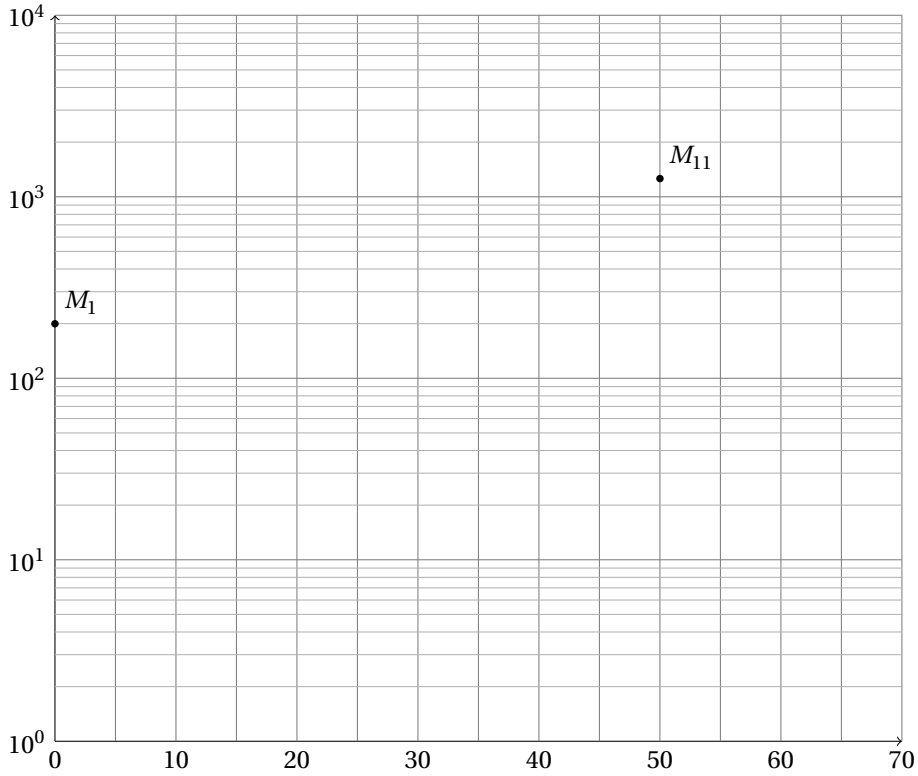
$f(x) = (-x^2 + x + 2)\mathrm{e}^x$




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.25]
   \tkzFnInit[xmin=-6,xmax=4,ymin=-5,ymax=6]
   \tkzFnGrid
   \tkzFnAxes
   \tkzFnDraw[name=f,color=red,thick,domain=-6:2.1785]{(-x*x+x+2)*exp(x)}
   \tkzFnTangent[draw,kl=2](f,0)
   \tkzFnDefPointXY[draw,size=3pt](2,0){b}
   \tkzFnDefPointXY[draw,size=3pt](-1,0){c}
   \tkzFnText(2,4){($\mathcal{C}$)}
   \tkzFnText(-2,-3){($\mathcal{T}$)}
\end{tikzpicture}
```

18.4 Axe logarithmique

Le repère sert ici seulement à placer les lignes ; les graduations sont écrites avec Ti*k*Z.



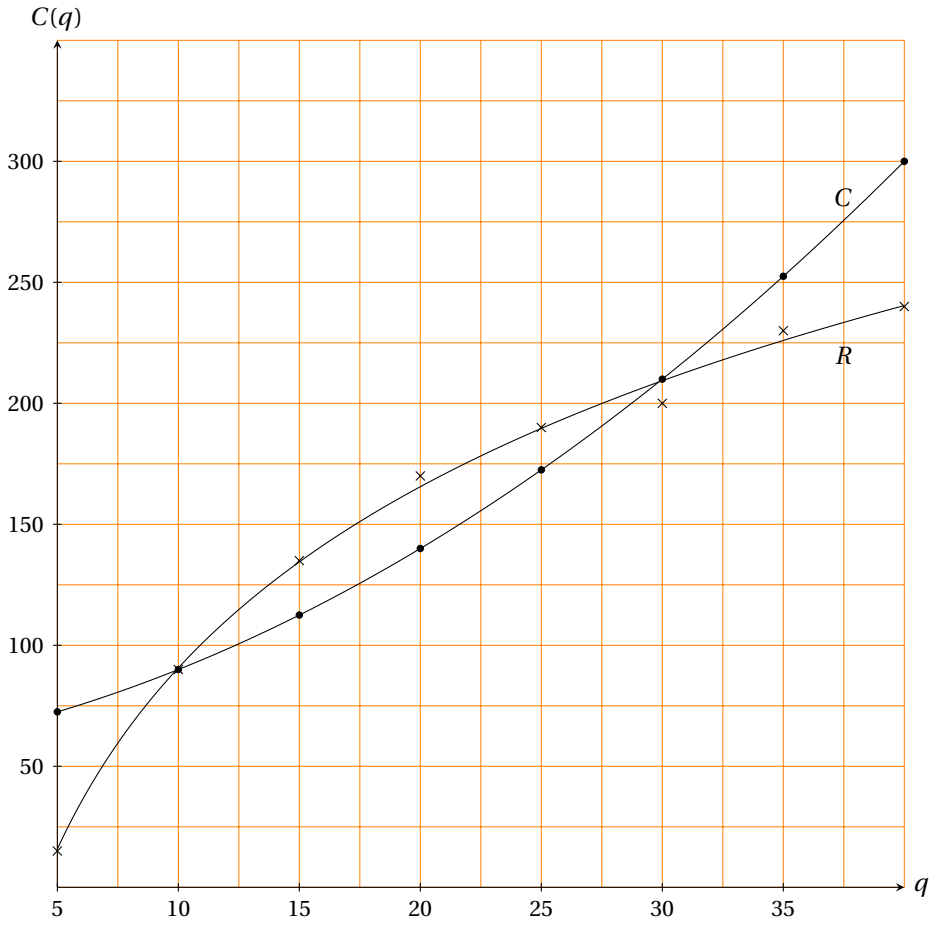

```
\begin{tikzpicture}[scale=0.8]
 \tkzFnInit[xmin=0,xmax=14,ymin=0,ymax=12]
 \draw[thin,->] (0,0) -- (14,0);
 \draw[thin,->] (0,0) -- (0,12);
 \foreach \x/\xtext in {0/0,2/10,4/20,6/30,8/40,10/50,12/60,14/70}
     {\draw[shift={(\x,0)}] node[below] {$\xtext$};}
 \foreach \y/\z in {0/0,3/1,6/2,9/3,12/4}
     {\draw[shift={(0,\y)}] node[left] {$10^{\z}$};}
 \tkzFnVLines[gray,thin]{1,2,...,14}
 \tkzFnHLines[gray,thin]{3,6,...,12}
 \foreach \y in {0,3,...,9}{
   \tkzFnHLines[thin,gray!60]{\y+3*log10(2),\y+3*log10(3),\y+3*log10(4),
     \y+3*log10(5),\y+3*log10(6),\y+3*log10(7),\y+3*log10(8),\y+3*log10(9)}}
 \tkzFnDefPointXY(0,6.90){a}
 \tkzFnDefPointXY(10,9.30){b}
 \tkzFnDrawPoints(a,b)
 \tkzFnLabelPoint(a){$M_{1}$}
 \tkzFnLabelPoint(b){$M_{11}$}
\end{tikzpicture}
```

Les valeurs `0.903`, `1.431`, … de **`tkz-fct`** sont remplacées par leur expression : $3\log 2 \approx 0{,}903$.

18.5 Un peu de tout

\tkzFnDrawData[⟨options de TikZ⟩]{⟨$x_1/y_1,x_2/y_2,\ldots$⟩}

Dessine des points donnés par leurs coordonnées dans le repère (équivalent de **\tkzDefSetOfPoints** *et* **\tkzDrawSetOfPoints**).
Les options sont celles d'un `plot` *de TikZ ; par défaut :* `only marks, mark=*`.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
 \tkzFnInit[xmin=5,xmax=40,ymin=0,ymax=350,xstep=2.5,ystep=25]
 \tkzFnGrid[color=orange]
 \tkzFnAxes[xlabel=$q$,ylabel=$C(q)$,dx=5,dy=50]
 \tkzFnDraw[name=C,domain=5:40]{0.1*x^2+2*x+60}
 \tkzFnMarkPoints(C){5,10,...,40}
 \tkzFnDraw[domain=5:40]{100*ln(x)-158}
 \tkzFnText(37.5,285){$C$}
 \tkzFnText(37.5,220){$R$}
 \tkzFnDrawData[mark=x,mark size=3pt]
   {5/15,10/90,15/135,20/170,25/190,30/200,35/230,40/240}
\end{tikzpicture}
```

18.6 Interpolation

Il s'agit ici de trouver un polynôme d'interpolation sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+8x^2}$$

Le polynôme d'interpolation est celui obtenu par la méthode de Lagrange avec vingt et un points équirépartis ; il est de degré 20.

Avec **tkz-fct**, il fallait calculer les coefficients du polynôme à l'extérieur, puis l'écrire avec la méthode de Horner. Avec Lua, le polynôme est calculé directement à partir des points : une fonction Lua est rangée dans la table FN à l'aide de tkzfn.fct. La courbe de f est en rouge, le polynôme d'interpolation en bleu, les points utilisés en jaune.

18.6.1 Le code

```
\tkzFnDef{f}{1/(1+8*x^2)}
\directlua{
  local xs, ys = {}, {}
  for i = 0, 20 do
    xs[i] = -1 + i/10
    ys[i] = FN.f(xs[i])
  end
  FN.P = tkzfn.fct(function(x)
    local s = 0
    for i = 0, 20 do
      local l = 1
      for j = 0, 20 do
        if j == i then else l = l*(x-xs[j])/(xs[i]-xs[j]) end
      end
      s = s + ys[i]*l
    end
    return s
  end)
}
\begin{tikzpicture}
  \tkzFnInit[xmin=-1,xmax=1,ymin=-1.8,ymax=1.2,xstep=0.1,ystep=0.2]
  \tkzFnGrid
  \tkzFnAxes
  \tkzFnDraw[samples=400,line width=4pt,color=red,opacity=.5](f)
  \tkzFnDraw[samples=400,line width=1pt,color=blue](P)
  \tikzset{tkzfn point/.style={draw=black,fill=yellow}}
  \tkzFnMarkPoints[size=3pt](f){-1,-0.9,...,1}
\end{tikzpicture}
```

Le résultat est sur la page suivante, où l'on peut constater le phénomène de Runge.

18.6.2 La figure

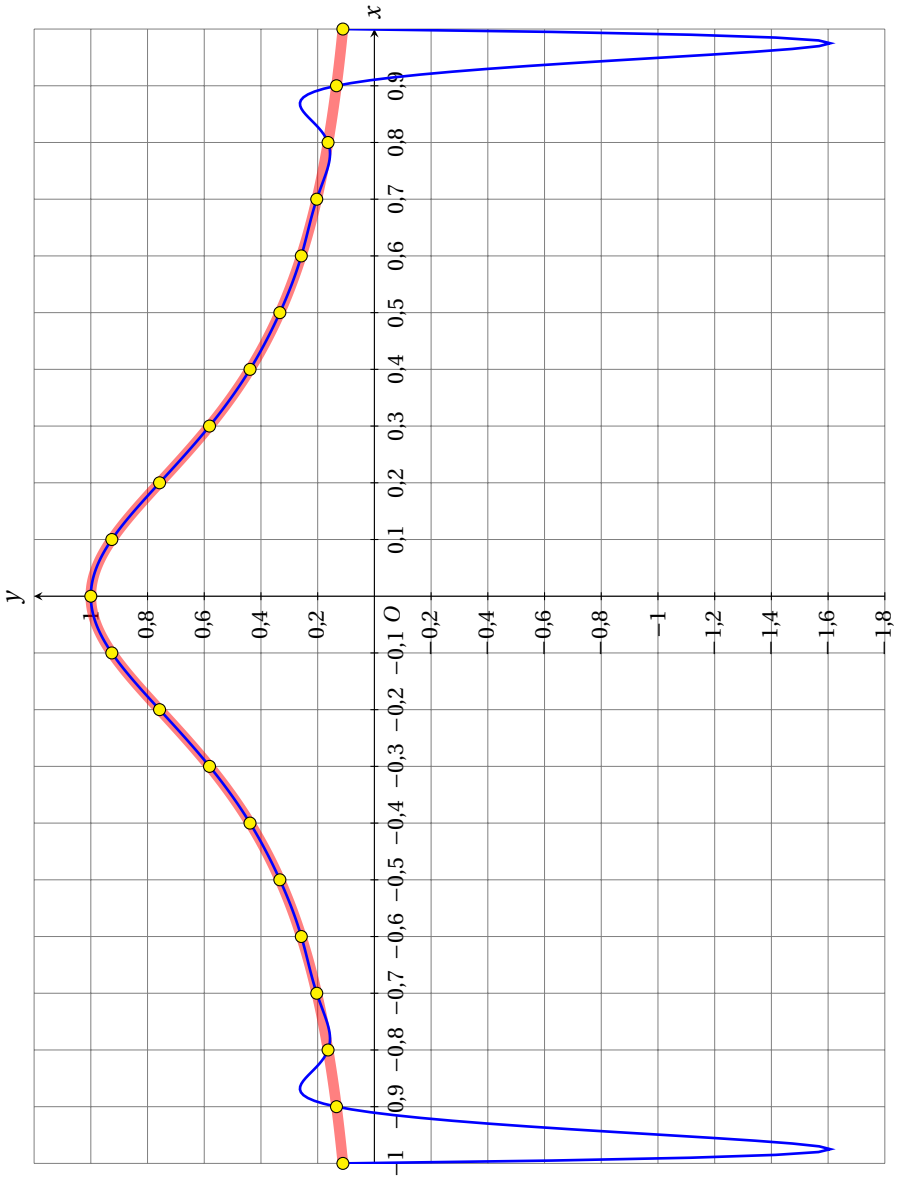


FIGURE 1 : Interpolation : $\frac{1}{1+8x^2}$

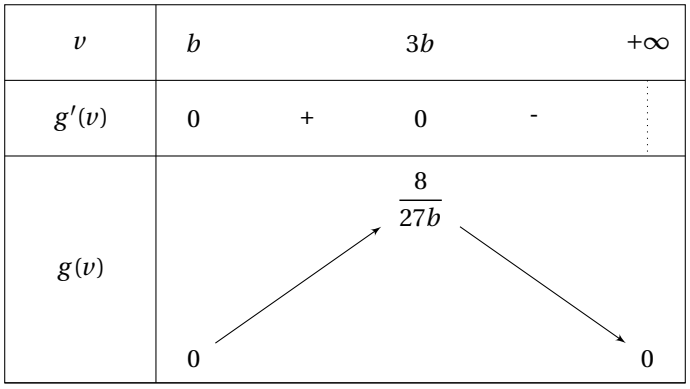
18.7 Courbes de Van der Waals

Soient v le volume d'une masse fluide et p sa pression. b et k sont deux nombres réels strictement positifs. On souhaite étudier une formule exprimant la dépendance de ces variables proposée par Van der Waals.

$$p(v) = \frac{-3}{v^2} + \frac{3k}{v-b}$$

définie sur l'intervalle $I =]b\,;+\infty[$.

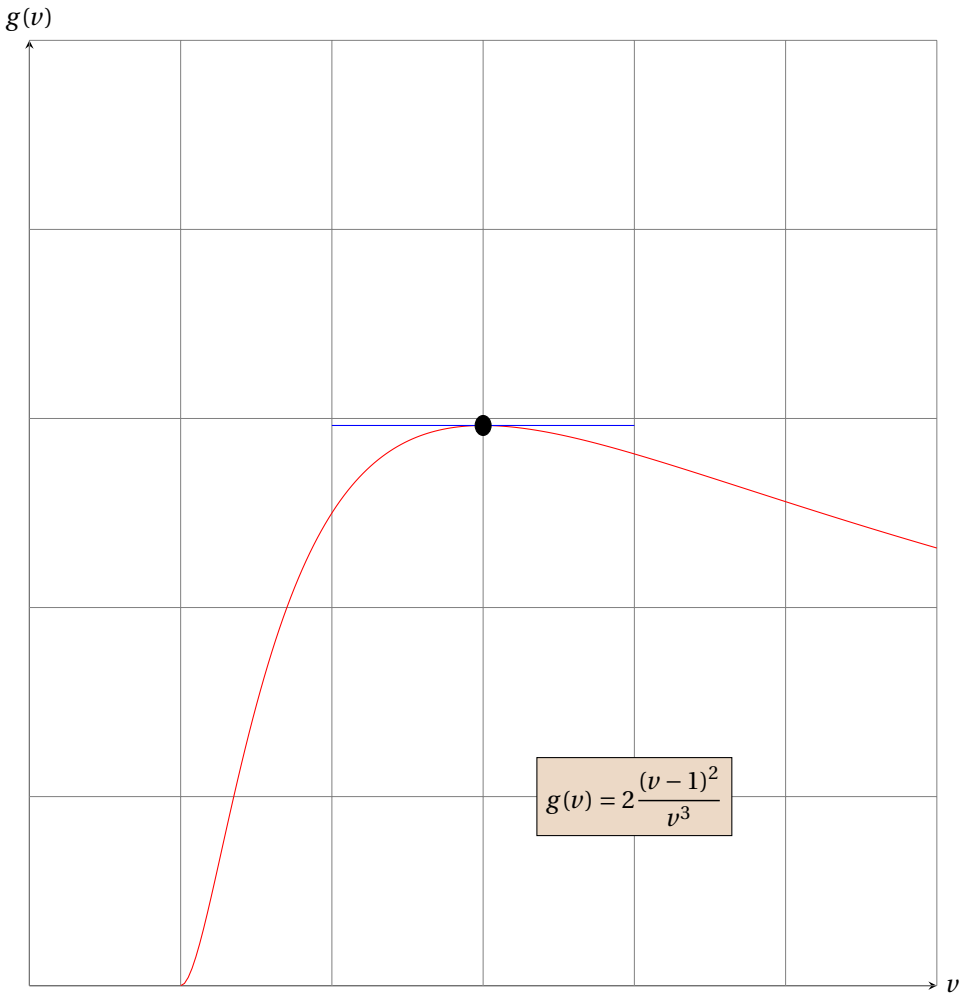
18.7.1 Tableau de variations




```
\begin{tikzpicture}
\tkzTab
{ $v$      /1,
  $g'(v)$  /1,
  $g(v)$   /3
}
{ $b$ ,
  $3b$ ,
  $+\infty$
}
{0,$+$,$0$,$-$,t}
{-/           $0$    /,
 +/$\dfrac{8}{27b}$  /,
 -/  $0$             /}
\end{tikzpicture}
```

18.7.2 Première courbe avec b=1

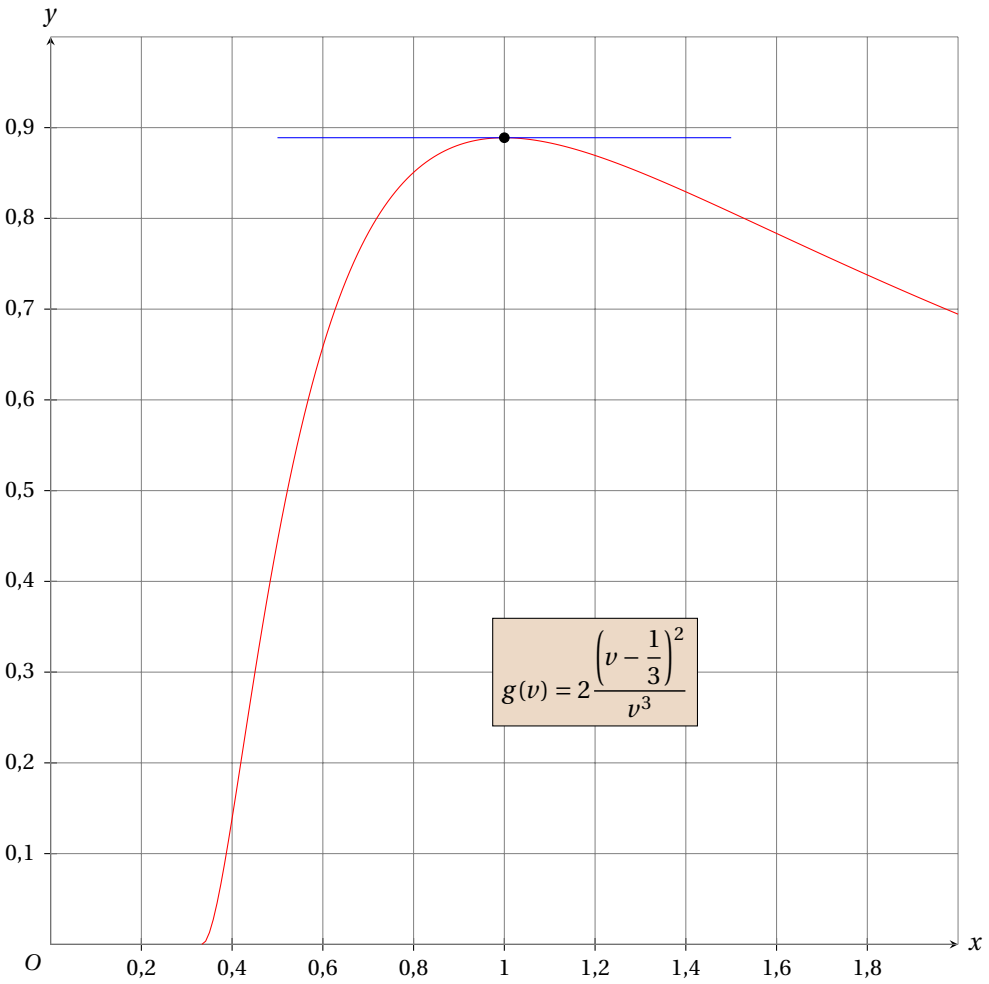
Quelques courbes pour $1 \leq v \leq 6$




```
\begin{tikzpicture}[xscale=2,yscale=2.5]
   \tkzFnInit[xmin=0,xmax=6,ymin=0,ymax=0.5,ystep=0.1]
   \tkzFnAxisX[ticks=false,label=$v$]
   \tkzFnAxisY[ticks=false,label=$g(v)$]
   \tkzFnGrid(0,0)(6,0.5)
   \tkzFnDraw[name=g,color=red,domain=1:6]{(2*(x-1)*(x-1))/(x*x*x)}
   \tkzFnTangent[color=blue,draw](g,3)
   \tkzFnText[draw,fill=brown!30](4,0.1){$g(v)=2\dfrac{(v-1)^2}{v^3}$}
\end{tikzpicture}
```

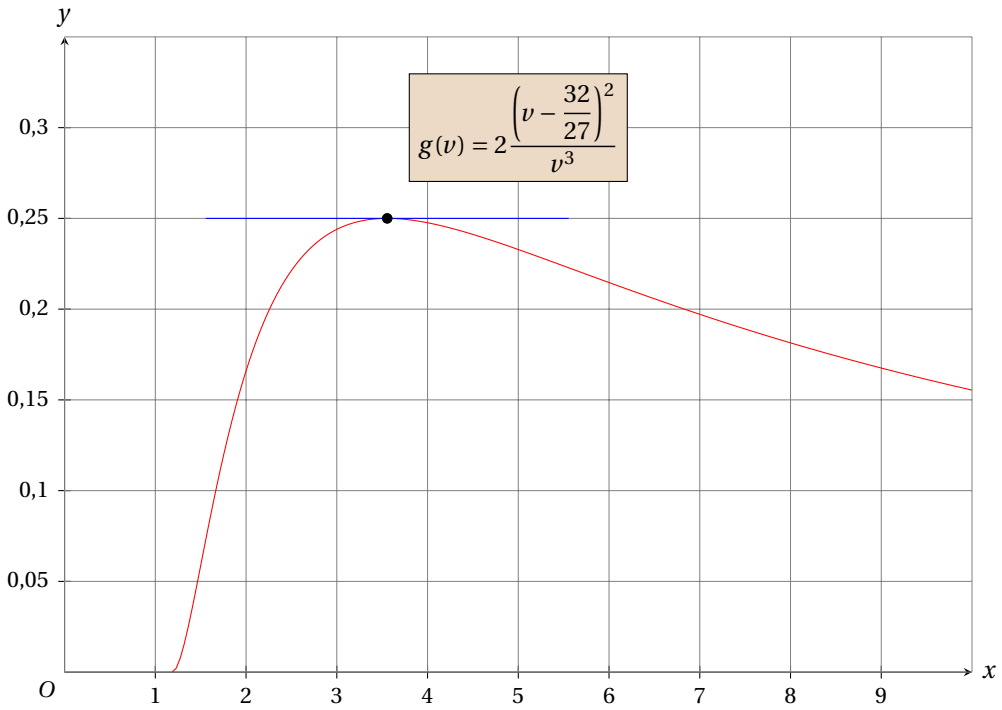
Le maximum est atteint en $v = 3 : g(3) = \dfrac{8}{27} \approx 0{,}2963$.

18.7.3 Deuxième courbe b=1/3




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.2]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=2,xstep=0.2,ymin=0,ymax=1,ystep=0.1]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnGrid(0,0)(2,1)
  \tkzFnDraw[name=g,color=red,domain=1/3:2]{(2*(x-1/3)^2)/x^3}
  \tkzFnTangent[draw,color=blue,kr=.5,kl=.5](g,1)
  \tkzFnText[draw,fill=brown!30](1.2,0.3)
            {$g(v)=2\dfrac{\left(v-\dfrac{1}{3}\right)^2}{v^3}$}
\end{tikzpicture}
```

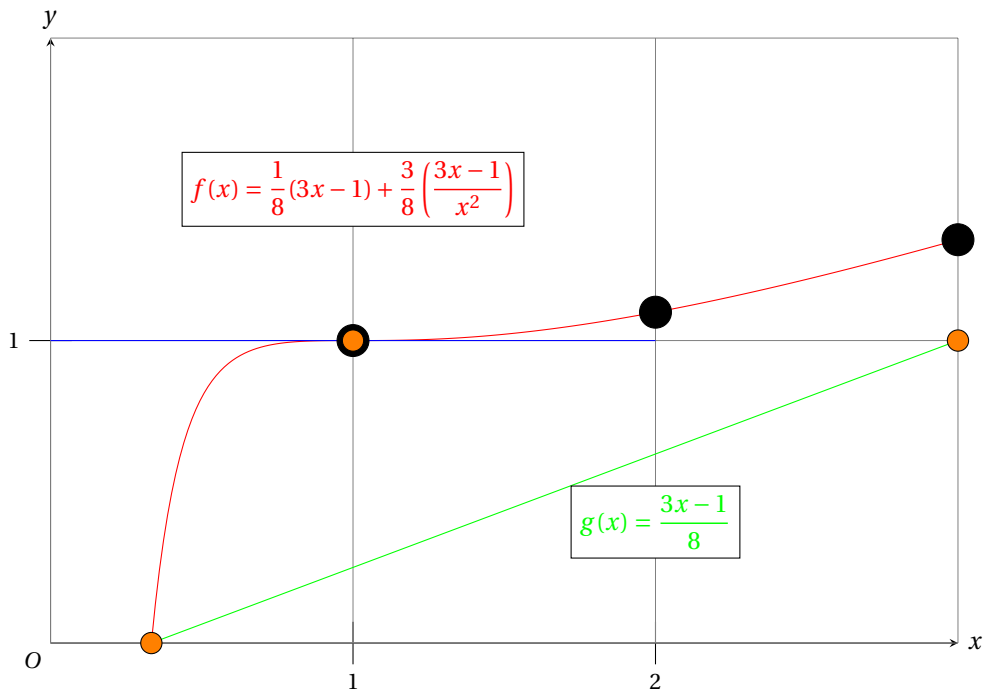
18.7.4 Troisième courbe b=32/27




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.2]
    \tkzFnInit[xmin=0,xmax=10,ymin=0,ymax=.35,ystep=0.05]
    \tkzFnAxes
    \tkzFnGrid(0,0)(10,.35)
    \tkzFnDraw[name=g,color=red,domain=32/27:10]{(2*(x-32/27)^2)/x^3}
    \tkzFnTangent[draw,color=blue,kr=2,kl=2](g,{32/9})
    \tkzFnText[draw,fill=brown!30](5,0.3)
            {$g(v)=2\dfrac{\left(v-\dfrac{32}{27}\right)^2}{v^3}$}
\end{tikzpicture}
```

18.8 Valeurs critiques

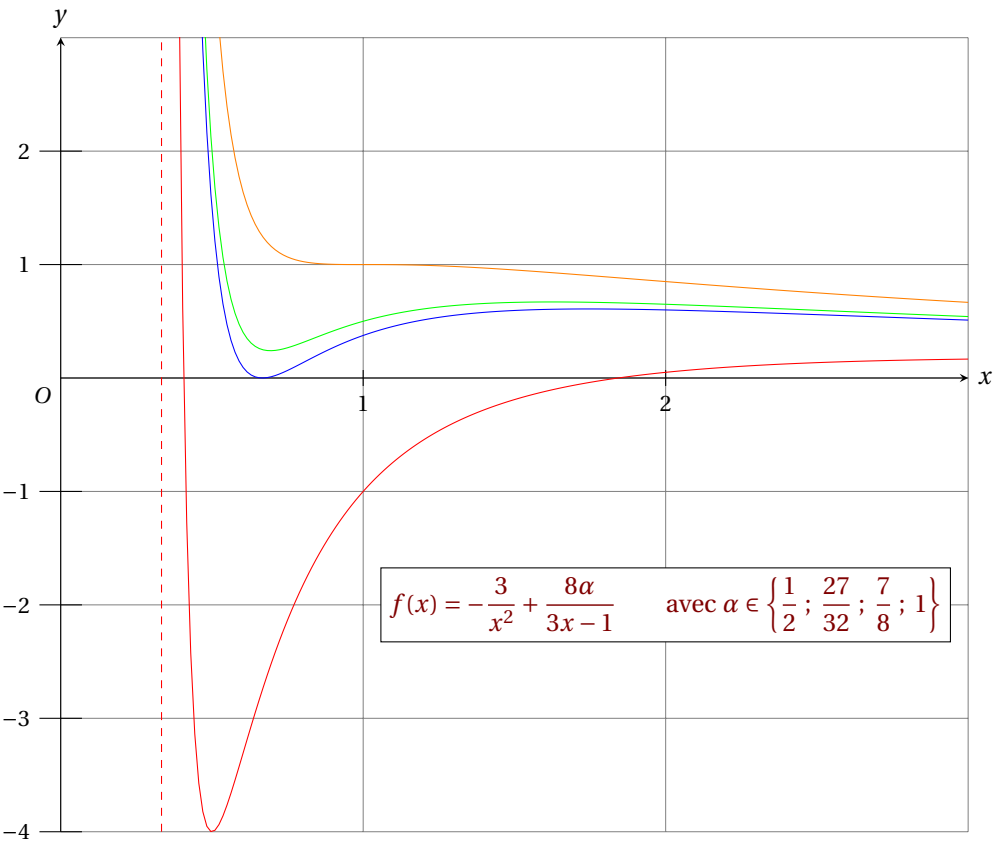
18.8.1 Courbes de Van der Waals




```
\begin{tikzpicture}[scale=4]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=0,ymax=2]
  \tkzFnAxes
  \tkzFnGrid(0,0)(3,2)
  \tkzFnDraw[name=f,color=red,domain=1/3:3]{0.125*(3*x-1)+0.375*(3*x-1)/(x*x)}
  \tkzFnMarkPoints(f){2,3}
  \tkzFnTangent[draw,color=blue](f,1)
  \tkzFnDraw[name=g,color=green,domain=1/3:3]{0.125*(3*x-1)}
  \tkzFnMarkPoints[size=1pt,fill=orange](g){1/3,3}
  \tkzFnDefPointXY[draw,size=1pt,fill=orange](1,1){F}
  \tkzFnText[draw,fill=white,text=red](1,1.5)
  {$f(x)=\dfrac{1}{8}(3x-1)+\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)$}
  \tkzFnText[draw,fill=white,text=green](2,0.4){$g(x) = \dfrac{3x-1}{8}$}
\end{tikzpicture}
```

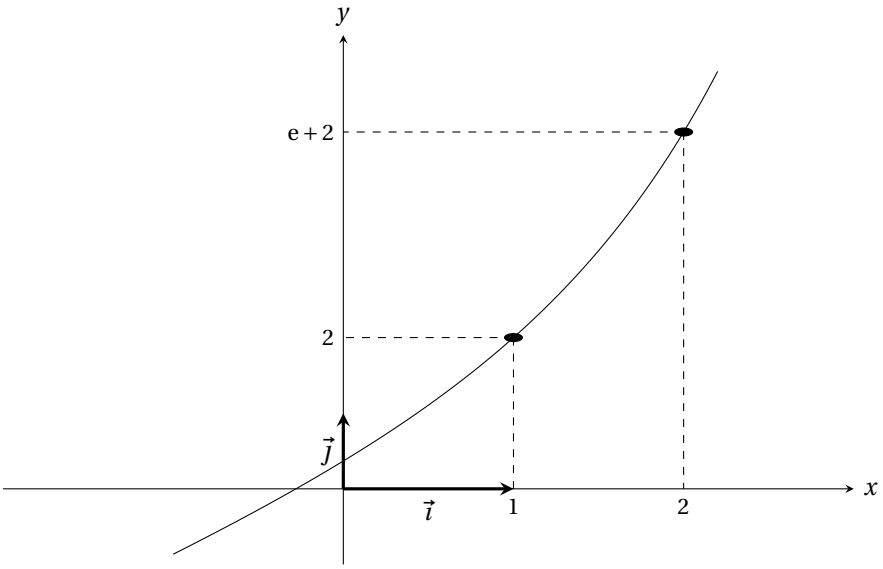
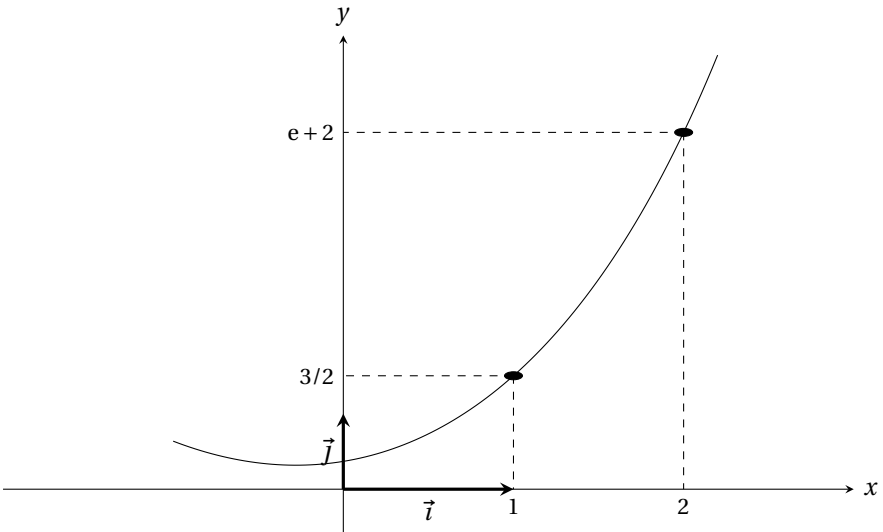
18.8.2 Courbes de Van der Waals (suite)

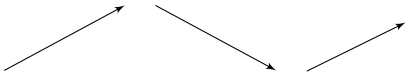
La boucle `\foreach` remplace les quatre définitions ; la variable de la boucle est utilisée dans l'expression.




```
\begin{tikzpicture}[xscale=4,yscale=1.5]
  \tkzFnInit[xmin=0,xmax=3,ymin=-4,ymax=3]
  \tkzFnGrid(0,-4)(3,3)
  \tkzFnAxes
  \tkzFnVLine[color=red,dashed]{1/3}
  \foreach \a/\c in {0.5/red,0.84375/blue,1/orange,0.875/green}
    {\tkzFnDraw[color=\c,domain=0.35:3]{-3/(x*x)+8*\a/(3*x-1)}}
  \tkzFnText[draw,fill=white,text=Maroon](2,-2)
   {$f(x)=-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{8\alpha}{3x-1}$ \hspace{.5cm}
   avec $\alpha \in
   \left\{\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{27}{32}~;~\dfrac{7}{8}~;~1\right\}$}
\end{tikzpicture}
```

19 Exemples avec les packages alterqcm et tkz-tab

Questions	Réponses
La figure 1 donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ et la figure 2 celle d'une primitive de f sur $\mathbf{R}^+$.  	
1. Quelle est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la représentation graphique de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?	☐ $\mathrm{e} + \frac{3}{4}$ ☐ $\mathrm{e} + \frac{1}{2}$ ☐ 1

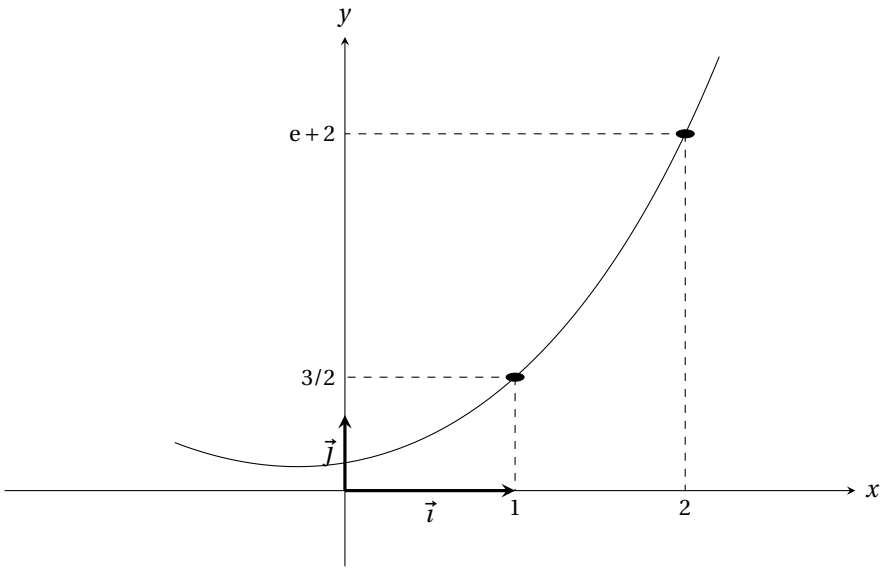
<table>
<tr><th>Questions</th><th>Réponses</th></tr>
<tr><td colspan="2">La fonction k définie et strictement positive sur $\mathbf{R}^+$ est connue par son tableau de variations.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$k(x)$</td><td colspan="3"></td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2. Parmi les tableaux suivants, quel est le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbf{R}^+$ par
$$g(x)=\frac{1}{k(x)}\,?$$</td><td>☐ Tableau A
☐ Tableau B
☐ Tableau C</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tableau A
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td colspan="3"></td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
Tableau B
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td colspan="3"></td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
Tableau C
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td colspan="3"></td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3. Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x)=\mathrm{e}^x-x+1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.</td><td>☐ La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$
☐ La droite d'équation $x=0$ est asymptote à $\mathscr{C}$
☐ La droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$</td></tr>
<tr><td>4. En économie, le coût marginal est le coût occasionné par la production d'une unité supplémentaire, et on considère que le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total.
Dans une entreprise, une étude a montré que le coût marginal $C_m(q)$ exprimé en milliers d'euros en fonction du nombre q d'articles fabriqués est donné par la relation :
$$C_m(q)=3q^2-10q+\frac{2}{q}+20.$$</td><td>☐ $C_r(q)=q^3-5q^2+2\ln q+20q+9984$
☐ $C_r(q)=q^3-5q^2+2\ln q+20q-6$
☐ $C_r(q)=6q-10-\dfrac{2}{q^2}$</td></tr>
</table>

Voici le code des deux représentations de f et de sa primitive :

19.0.1 Première représentation

```
\begin{tikzpicture}[xscale=2.25,yscale=1]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=3,ymin=-1,ymax=6]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnDraw[samples=100,domain=-1:2.2]{x+exp(x-1)}
  \tkzFnDefPointXY[draw](1,2){pt1}
  \tkzFnShowCoord[xlabel=$1$,ylabel=$2$](pt1)
  \tkzFnDefPointXY[draw](2,2+e){pt2}
  \tkzFnShowCoord[xlabel=$2$,ylabel=$\text{e}+2$](pt2)
  \tkzFnRep
\end{tikzpicture}
```

19.0.2 Seconde représentation




```
\begin{tikzpicture}[xscale=2.25,yscale=1]
  \tkzFnInit[xmin=-2,xmax=3,ymin=-1,ymax=6]
  \tkzFnAxes[ticks=false]
  \tkzFnDraw[samples=100,domain=-1:2.2]{x*x/2+exp(x-1)}
  \tkzFnDefPointXY[draw](1,1.5){pt1}
  \tkzFnShowCoord[xlabel=$1$,ylabel=$3/2$](pt1)
  \tkzFnDefPointXY[draw](2,2+e){pt2}
  \tkzFnShowCoord[xlabel=$2$,ylabel=$\text{e}+2$](pt2)
  \tkzFnRep
\end{tikzpicture}
```

La réponse à la première question se vérifie avec Lua : $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 3{,}2183$ et $\mathrm{e} + \frac{1}{2} \approx 3{,}2183$.

Code d'un tableau de variations :

```
\begin{tikzpicture}
     \tkzTabInit[lgt=1,espcl=2]{$x$/0.5,$k(x)$/1.5}
     {$0$,$1$,$3$,$+\infty$}
     \tkzTabVar{-/            /,%
                +/            /,%
                -/            /,%
                +/ $+\infty$  /}%
\end{tikzpicture}
```

20 De tkz-fct à tkz-fn

20.1 Correspondance des macros

tkz-fct / tkz-base	tkz-fn
\tkzInit	\tkzFnInit
\tkzGrid[sub,subxstep,subystep]	\tkzFnGrid[sub,subdx,subdy]
\tkzAxeXY, \tkzAxeX, \tkzAxeY	\tkzFnAxes, \tkzFnAxisX, \tkzFnAxisY
\tkzDrawX, \tkzDrawXY	\tkzFnAxisX[ticks=false], \tkzFnAxes[ticks=false]
\tkzAxeX[trig=2]	\tkzFnAxisX[trig=2]
\tkzClip, \tkzRep, \tkzText	\tkzFnClip, \tkzFnRep, \tkzFnText
\tkzFct{x**2}	\tkzFnDraw{x^2} ou \tkzFnDraw[name=f]{x^2}
\tkzDefPointByFct(2)	\tkzFnDefPoint(f,2){A}
\tkzDefPoint(1,2){A}	\tkzFnDefPointXY(1,2){A}
\tkzDrawPoint, \tkzLabelPoint	\tkzFnDrawPoints, \tkzFnLabelPoint
\tkzSetUpPoint	style tkzfn point
\tkzPointShowCoord	\tkzFnShowCoord
\tkzDrawTangentLine[with=b](1)	\tkzFnTangent(g,1)
\tkzDrawArea[domain=1:2]	\tkzFnArea[domain=1:2](f)
\tkzDrawAreafg[between=a and b]	\tkzFnArea(f,g)
\tkzDrawRiemannSum, ...Inf, ...Sup	\tkzFnRiemann[method=left](f), inf, sup
\tkzDrawRiemannSumMid	\tkzFnRiemann[method=mid](f) (voir ci-dessous)
\tkzFctPar, \tkzFctPolar	\tkzFnParam, \tkzFnPolar
\tkzVLine(s), \tkzHLine(s)	\tkzFnVLine(s), \tkzFnHLine(s)
\tkzDefSetOfPoints, \tkzDrawSetOfPoints	\tkzFnDrawData
\tkzXH	pas encore d'équivalent

20.2 Ce qui change

1. Les expressions sont des expressions Lua : `x^2` au lieu de `x**2`, `ln(x)` ou `log(x)` pour le logarithme népérien, `1/3` est un quotient décimal.
2. La variable est toujours `x`, même si **xstep** est différent de 1 : \x n'est plus utilisé.
3. Une fonction est désignée par son nom ; l'option **with** et les références `a`, `b`, … ont disparu. Il n'y a plus de limite de 26 fonctions.
4. **\tkzFctLast** et **\tkzFctgnua** n'existent plus : pour placer des points ou des tangentes sans tracer la courbe, on définit la fonction avec **\tkzFnDef**.
5. La forme de `Horner` n'est plus nécessaire et les puissances de nombres négatifs sont correctes.
6. Les longueurs **kl** et **kr** des demi-tangentes sont toujours données en unités de l'axe des abscisses ; le style des tangentes (**tkzfn tangent**) est vide par défaut, alors que **tkz-fct** dessinait des flèches.
7. Avec **method=mid**, la hauteur du rectangle est l'image du milieu de l'intervalle ; avec **tkz-fct**, c'était la moyenne des images des extrémités.
8. Les courbes sont découpées à la fenêtre et interrompues aux asymptotes verticales.
9. Les nombres sont écrits sous la forme française ou américaine, sans **numprint**.
10. Nouvelles présentations des axes : flèches aux deux extrémités (**arrows=both**) et présentation « boîte » (**box**).

21 Liste des macros

— \tkzFnSetup{⟨format=fr ou us,decimals=2,axes=school ou box,arrows=end⟩}
— \tkzFnInit[⟨xmin=-5,xmax=5,xstep=1,ymin=-5,ymax=5,ystep=1,enlarge⟩]
— \tkzFnGrid[⟨dx,dy,sub,subdx,subdy⟩](⟨x_1,y_1⟩)(⟨x_2,y_2⟩)
— \tkzFnAxes[⟨dx,dy,xlabel,ylabel,ticks,labels,line,origin,trig,decimals,box,tick length,arrows⟩]
— \tkzFnAxisX[⟨label,label style,step,trig,ticks,labels,line,decimals,arrows⟩]
— \tkzFnAxisY[⟨label,label style,step,ticks,labels,line,decimals,arrows⟩]
— \tkzFnClip[⟨marge⟩]
— \tkzFnRep[⟨options⟩]
— \tkzFnText[⟨options⟩](⟨x,y⟩){⟨texte⟩}
— \tkzFnDef{⟨nom⟩}{⟨expression⟩}
— \tkzFnDraw[⟨domain,samples=200,name,clip=true,mark,smooth⟩](⟨nom⟩) ou {⟨expression⟩}
— \tkzFnParam[⟨domain=0:2*pi,samples=200,clip=false⟩]{⟨$x(t)$⟩}{⟨$y(t)$⟩}
— \tkzFnPolar[⟨domain=0:2*pi,samples=200,clip=false⟩]{⟨$\rho(t)$⟩}
— \tkzFnImplicit[⟨level=0,samples=100,domain,ydomain,refine=true,clip=true⟩]{⟨$F(x,y)$⟩}
— \tkzFnDefPoint[⟨draw,size⟩](⟨f,x⟩){⟨nom⟩}
— \tkzFnDefPointXY[⟨draw,size⟩](⟨x,y⟩){⟨nom⟩}
— \tkzFnDrawPoints[⟨size⟩](⟨A,B,…⟩)
— \tkzFnMarkPoints[⟨size⟩](⟨f⟩){⟨liste⟩}
— \tkzFnLabelPoint[⟨options⟩](⟨A⟩){⟨texte⟩}, \tkzFnLabelPoints[⟨options⟩](⟨A,B,…⟩)
— \tkzFnShowCoord[⟨xlabel,ylabel,decimals⟩](⟨A⟩)
— \tkzFnTangent[⟨kl=1,kr=1,draw,clip=true⟩](⟨f,a⟩)
— \tkzFnTangent[⟨at=zeros|extrema,domain,samples=400,...⟩](⟨f⟩)
— \tkzFnZeros[⟨at=zeros,domain,samples=400,name=z,draw⟩](⟨f⟩)
— \tkzFnArea[⟨domain,where=both,samples,clip=true⟩](⟨f⟩) ou (⟨f,g⟩)
— \tkzFnRiemann[⟨method=left,interval,number=10,clip=false⟩](⟨f⟩)
— \tkzFnVLines[⟨options⟩]{⟨liste⟩}, \tkzFnHLines[⟨options⟩]{⟨liste⟩}
— \tkzFnDrawData[⟨options⟩]{⟨x_1 / y_1,…⟩}
— \tkzFnPrint[⟨décimales⟩]{⟨expression⟩}
— \tkzFnPrintCoord[⟨décimales⟩](⟨A⟩)
— \tkzFnPrintInterval[⟨oo, cc, oc, co⟩]{⟨a⟩}{⟨b⟩}

21.1 Styles

style	défaut
tkzfn curve	
tkzfn tangent	
tkzfn point	draw=black,fill=black
tkzfn area	fill=lightgray,fill opacity=.5
tkzfn riemann	draw,fill=gray!20
tkzfn line	
tkzfn grid	help lines
tkzfn subgrid	very thin,opacity=.5
tkzfn axis	->,>=stealth
tkzfn ticks	thin
tkzfn tick label	font=\small
tkzfn show coord	dashed,thin
tkzfn rep	->,>=stealth,very thick
tkzfn box	
tkzfn text	

Index

\clip, 9

\foreach, 22, 32, 51, 68, 70, 88

\tkzAxeXY, 8
\tkzClip, 8
\tkzDefPoint, 20
\tkzDefSetOfPoints, 80
\tkzDrawSetOfPoints, 80
\tkzDrawX, 8, 9
\tkzFctgnua, 92
\tkzFctLast, 22, 92
\tkzFnArea, 15, 39, 93
\tkzFnArea: options
    clip, 39
    domain, 39
    samples, 39
    where, 39
\tkzFnAxes, 9, 10, 93
\tkzFnAxes: options
    arrows, 9
    box, 9
    decimals, 9
    dx, dy, 9
    labels, 9
    line, 9
    origin, 9
    style, 9
    tick length, 9
    ticks, 9
    trig, 9
    xlabel, ylabel, 9
\tkzFnAxisX, 9, 10, 93
\tkzFnAxisY, 9, 10, 93
\tkzFnClip, 9, 93
\tkzFnDef, 7, 15, 33, 73, 92, 93
\tkzFnDef: arguments
    expression, 15
    nom, 15
\tkzFnDefPoint, 20, 75, 93
\tkzFnDefPoint: arguments
    fonction,x, 20
    nom du point, 20
\tkzFnDefPoint: options
    draw, 20
    size, 20
\tkzFnDefPointXY, 20, 75, 93
\tkzFnDraw, 12, 15, 93
\tkzFnDraw: options
    clip, 15
    domain, 15
    mark=…, 15

name, 15
samples, 15
smooth, 15
\tkzFnDrawData, 80, 93
\tkzFnDrawPoints, 20, 93
\tkzFnGrid, 8, 93
\tkzFnGrid: options
dx, 8
dy, 8
subdx, 8
subdy, 8
sub, 8
\tkzFnHLine, 52
\tkzFnHLines, 52, 93
\tkzFnImplicit, 68, 93
\tkzFnImplicit: options
clip, 68
domain, 68
level, 68
refine, 68
samples, 68
ydomain, 68
\tkzFnInit, 6, 8, 12, 15, 68, 93
\tkzFnInit: options
enlarge x, enlarge y, 8
enlarge, 8
xmax, 8
xmin, 8
xorigin, 8
xstep, 8
ymax, 8
ymin, 8
yorigin, 8
ystep, 8
\tkzFnLabelPoint, 20, 93
\tkzFnLabelPoints, 20, 93
\tkzFnMarkPoints, 22, 93
\tkzFnNbZeros, 36
\tkzFnParam, 56, 93
\tkzFnParam: arguments
x(t),y(t), 56
\tkzFnParam: options
clip, 56
domain, 56
samples, 56
\tkzFnPolar, 63, 93
\tkzFnPolar: options
clip, 63
domain, 63
samples, 63
\tkzFnPrint, 7, 73, 93
\tkzFnPrintCoord, 24, 25, 36, 75, 93
\tkzFnPrintInterval, 73, 93

\tkzFnRep, 9, 93
\tkzFnRiemann, 48, 93
\tkzFnRiemann: options
    clip, 48
    interval, 48
    method, 48
    number, 48
\tkzFnSetup, 73, 93
\tkzFnSetup: options
    arrows, 73
    axes, 73
    decimals, 73
    format, 73
\tkzFnShowCoord, 24, 93
\tkzFnTangent, 15, 27, 37, 93
\tkzFnTangent: arguments
    fonction,a, 27
    fonction, 27
\tkzFnTangent: options
    at, 27
    clip, 27
    draw, 27
    kl, 27
    kr, 27
\tkzFnText, 10, 26, 93
\tkzFnVLine, 51
\tkzFnVLines, 51, 93
\tkzFnVLines: arguments
    liste, 51
\tkzFnZeros, 36, 37, 93
\tkzFnZeros: options
    at, 36
    domain, 36
    draw, 36
    name, 36
    samples, 36
    size, 36
\tkzGrid, 8
\tkzInit, 8
\tkzRep, 8
\tkzSetUpPoint, 20
\tkzText, 8